Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - rozbitek

Opracowanie: Karolina Kędzierska, Magdalena Słodkowska

Zadanie:

Samoloty szukają rozbitka niezależnie od siebie. Czas poszukiwania rozbitka przez i-ty samolot (w godzinach) ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

(a) Wyznacz rozkład czasu potrzebnego do odnalezienia rozbitka.

(b) Wyznacz średni czas potrzebny do odnalezienia rozbitka.

(c) Załóżmy, że $\lambda_i = 0.2$ dla każdego i. Jak wiele samolotów powinno szukać rozbitka, aby odnaleźć go w ciagu 1 godziny z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9?

Rozwiązanie:

(a)

- Niech X_i oznacza czas poszukiwania rozbitka przez i-ty samolot, $i = 1, 2, \ldots, n$.
  Z treści zadania $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
  Dystrybuanta zmiennej losowej X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ma zatem postać
  $F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda_i x}, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$
- Niech X oznacza czas potrzebny do odnalezienia rozbitka. Mamy $X = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
  Zmienna losowa X ma dystrybuantę postaci
  $F_X(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \ldots (1 - F_{X_n}(x)) =$
  $= \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda_1 x}))(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x})) \ldots (1 - (1 - e^{-\lambda_n x})), & \text{gdy } x > 0 \end{cases} =$
  $= \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ 1 - (e^{-\lambda_1 x})(e^{-\lambda_2 x}) \ldots (e^{-\lambda_n x}), & \text{gdy } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 x - \ldots - \lambda_n x}, & \text{gdy } x > 0 \end{cases} =$
  $= \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x}, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$
- Jest to dystrybuanta rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}xp(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$, zatem X ma taki właśnie rozkład.

(b) Wiemy, że $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, gdzie $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. Wartość średnia takiego rokładu jest równa $\frac{1}{\lambda}$. Zatem, średni czas potrzebny do odnalezienia rozbitka jest równy:

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}.$$

(c)

- $\forall_i \quad \lambda_i = 0.2$, zatem X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0.2n)$.
- Niech n oznacza liczbę samolotów potrzebnych do szukania rozbitka. Szukamy takiego $n \in \mathbb{N}$, aby $P(X \leqslant 1) \geqslant 0.9$. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły, wykładniczy $\mathcal{E}xp(0.2n)$, więc $P(X \leqslant 1) = F_X(1) = 1 - e^{-0.2n}$. Mamy

$$P(X \leqslant 1) \geqslant 0.9 \;\Leftrightarrow\; 1 - e^{-0.2n} \geqslant 0.9 \;\Leftrightarrow\; e^{-0.2n} \leqslant 0.1 \;\Leftrightarrow\; -0.2n \leqslant \ln 0.1 \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \frac{\ln 0.1}{-0.2} \approx 11.51$$

Wniosek: Aby odnaleźć rozbitka w ciągu godziny z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9, powinno go szukać co najmniej 12 samolotów.