Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - zadanie o ruinie gracza

Opracowanie: Magdalena Orłowska, Magdalena Marut, Filip Morąg

Zadanie:
Gracz rzuca monetą symetryczną. Jeśli wypadnie reszka, to wygrywa on 1 zł, a jeśli orzeł - to traci 1 zł. Na początku gry gracz ma k zł. Gra się kończy, gdy gracz wygra z góry ustaloną kwotę a zł albo przegra wszystkie pieniądze. Jakie jest prawdopodobieństwo zrujnowania się gracza?

Rozwiązanie:
Gracz zaczyna grę z kapitałem k, $0 \leqslant k \leqslant a$. Interesuje nas prawdopodobieństwo ruiny gracza[1]. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

A_k - zdarzenie polegające na tym, że gracz zaczynający z kapitałem k, przegra wszystkie pieniądze, czyli dojdzie do 0, zanim dojdzie do a;
$p_k = P(A_k)$
q - prawdopodobieństwo wypadnięcia reszki, $0 < q < 1$,
$1 - q$ - prawdopodobieństwo wypadnięcia orła.
(W przypadku monety symetrycznej $q = \frac{1}{2}$.)

Rozwiązywanie naszego zadania o ruinie rozpoczniemy od opisania gry przy użyciu ciągu: X_1,X_2,... niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie dwupunktowym $P(X_n = 1) = q$ oraz $P(X_n = -1) = 1 - q$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$. Zmienna losowa X_n informuje nas o wyniku $n-$tego ruchu gracza. $X_n = 1$ oznacza, że gracz wygrał 1 zł w n-tej rundzie, a $X_n = -1$, że gracz przegrał (czyli wygrał -1 zł). Oznaczmy kapitał naszego gracza po n-tym ruchu przez $K_{k,n}$. Kapitał ten to zmienna losowa, która wyraża się wzorem:

$$K_{k,n} = k + (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = k + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Zdarzenie losowe A_k możemy teraz wyrazić za pomocą zmiennych losowych $K_{k,n}, n = 1, 2, \ldots,$:

$$A_k = \{\exists n : K_{k,n} = 0 \ \wedge \ \forall_{i=0,1,\ldots,n-1} \ \ 0 < K_{k,i} < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k,n},$$

gdzie:

$$A_{k,1} = \ \{K_{k,1} = 0\}$$

$$A_{k,n} = \ \{K_{k,n} = 0 \ \wedge \ \forall_{i=0,1,\ldots,n-1} \ \ 0 < K_{k,i} < a\} = \{K_{k,n} = 0\} \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} \{0 < K_{k,i} < a\}$$

dla $n \geqslant 2$, przy czym $A_{k,1}$; $A_{k,2}$, ... są parami rozłączne. Stąd $p_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n}$, gdzie $p_{k,n} = P(A_{k,n})$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy, dla $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} p_{k,n} &= P(A_{k,n}|X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) + P(A_{k,n}|X_1 = -1) \cdot P(X_1 = -1) = \\ &= q \cdot P(A_{k,n}|X_1 = 1) + (1 - q)P(A_{k,n}|X_1 = -1). \end{aligned}$$

[1] Równie dobrze moglibyśmy pytać o prawdopodobieństwo wygrania sumy pieniędzy a zł , jednak w zadaniach tego typu przeważnie pytamy o prawdopodobieństwo ruiny. Prawdopodobnie wynika to z zawistnej natury ludzkiej.

Dla $n = 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_{k,1} &= q \cdot P(k + X_1 = 0 | X_1 = 1) + (1-q)P(k + X_1 = 0 | X_1 = -1) = \\ &= q \cdot P(k+1=0) + (1-q)P(k-1=0) = \\ &= \begin{cases} 1-q, & \text{gdy } k = 1 \\ \\ 0, & \text{gdy } k = 2, 3, \ldots, a-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dla $n = 2$:

$$\begin{aligned} p_{k,2} &= q \cdot P(\{k + X_1 + X_2 = 0\} \cap \{0 < k + X_1 < a\} | X_1 = 1) + \\ &+ (1-q)P(\{k + X_1 + X_2 = 0\} \cap \{0 < k + X_1 < a\} | X_1 = -1) = \\ &= q \cdot P(\{(k+1) + X_2 = 0\} \cap \{0 < k+1 < a\}) + \\ &+ (1-q)P(\{(k-1) + X_2 = 0\} \cap \{0 < k-1 < a\}), \end{aligned}$$

gdyż zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne. Ponieważ X_1 i X_2 mają taki sam rozkład, mamy

$$p_{k,2} = \begin{cases} qP((k+1) + X_1 = 0), & \text{gdy } k = 1, \\ \\ qP((k+1) + X_1 = 0) + (1-q)P((k-1) + X_1 = 0), & \text{gdy } k = 2, 3, \ldots, a-2, \\ \\ (1-q)P((k-1) + X_1 = 0), & \text{gdy } k = a-1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} qp_{k+1,1}, & \text{gdy } k = 1, \\ \\ qp_{k+1,1} + (1-q)p_{k-1,1}, & \text{gdy } k = 2, 3, \ldots, a-2, \\ \\ (1-q)p_{k-1,1}, & \text{gdy } k = a-1. \end{cases}$$

Podobnie dla $n \geqslant 3$

$$p_{k,n} = q \cdot P(\{k + X_1 + \ldots + X_n = 0\} \cap \bigcap_{i=2}^{n-1} \{0 < k + X_1 + \ldots + X_i < a\} \cap \{0 < k + X_1 < a\} | X_1 = 1) +$$

$$+ (1-q)P(\{k + X_1 + \ldots + X_n = 0\} \cap \bigcap_{i=2}^{n-1} \{0 < k + X_1 + \ldots + X_i < a\} \cap \{0 < k + X_1 < a\} | X_1 = -1) =$$

$$= p \cdot P(\{(k+1) + X_2 + \ldots + X_n = 0\} \cap \bigcap_{i=2}^{n-1} \{0 < (k+1) + X_2 + \ldots + X_i < a\} \cap \{0 < k+1 < a\}) +$$

$$+ (1-q)P(\{(k-1) + X_2 + \ldots + X_n = 0\} \cap \bigcap_{i=2}^{n-1} \{0 < (k-1) + X_2 + \ldots + X_i < a\} \cap \{0 < k-1 < a\}),$$

gdyż zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, a ponieważ mają one ten sam rozkład

$$p_{k,n} = \begin{cases} qP(\{(k+1) + X_1 + \ldots + X_{n-1} = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-2} \{0 < (k-1) + X_1 + \ldots + X_i < a\}), & \text{gdy } k = 1, \\ \\ qP(\{(k+1) + X_1 + \ldots + X_{n-1} = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-2} \{0 < (k-1) + X_1 + \ldots + X_i < a\}) + \\ \\ + (1-q)P(\{(k+1) + X_1 + \ldots + X_{n-1} = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-2} \{0 < (k-1) + X_1 + \ldots + X_i < a\}), & \text{gdy } k = 2, 3, \ldots, a-2, \\ \\ (1-q)P(\{(k+1) + X_1 + \ldots + X_{n-1} = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-2} \{0 < (k-1) + X_1 + \ldots + X_i < a\}), & \text{gdy } k = a-1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} qp_{k+1,n-1} & \text{dla } k=1, \\ qp_{k+1,n-1} + (1-q)p_{k-1,n-1} & \text{dla } k=2,\ldots,a-2, \\ (1-q)p_{k-1,n-1} & \text{dla } k=a-1. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność dla ciągu p_k:

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_{1,n} = p_{1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} p_{1,n} = (1-q) + \sum_{n=2}^{\infty} q \cdot p_{2,n-1} = (1-q) + q\sum_{n=2}^{\infty} p_{2,n} = (1-q) + q \cdot p_2$$

$$p_{a-1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{a-1,n} = \sum_{n=2}^{\infty} (1-q)p_{a-2,n-1} = (1-q)\cdot p_{a-2}$$

a dla $k = 2, 3, \ldots, a-2$

$$p_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n} = \sum_{n=1}^{\infty} (q(p_{k+1,n-1}) + (1-q)(p_{k-1,n-1})) = qp_{k+1} + (1-q)p_{k-1}$$

Zatem ciąg (p_k) spełnia następujące równanie:

$$p_k = qp_{k+1} + (1-q)p_{k-1}$$

przy założeniu $p_0 = 1$ i $p_a = 0$, $k = 1, 2, \ldots, a-1$. Warunki brzegowe $p_0 = 1$ oraz $p_a = 0$ są dość logiczne. Gdy kapitał początkowy (kwota, z którą zaczynamy naszą grę) jest równy 0, nie możemy rozpocząć gry i nic nie wygramy, czyli $p_0 = 1$. Gdy zaś nasz kapitał jest równy a, to od razu wygraliśmy ustaloną kwotę, stąd $p_a = 0$.

Gdy moneta jest symetryczna, czyli $q = \frac{1}{2}$, równanie powyższe jest postaci:

$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1}),\ \ k = 1, 2, \ldots, a-1.$$

Łatwo jest sprawdzić, że ciągi $p_k = k$ oraz $p_k \equiv 1$ spełniają to równanie. Mamy bowiem
$k = \frac{1}{2}(k-1+k+1)$ oraz $1 = \frac{1}{2}(1+1)$. Oczywiście także ciąg

$$p_k = A * 1 + B * k,$$

gdzie A i B to pewne stałe, jest rozwiązaniem tego równania.

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_a = a \end{cases}$$

jednoznacznie wyznaczają wartości stałych A, B. Mamy bowiem

$$\begin{cases} p_0 = A + B * 0 = 1 \\ p_a = A + B * a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B * a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie naszego równania z warunkami brzegowymi $p_0 = 1, p_a = 0$ jest postaci:

$$p_k = 1 - \frac{k}{a}, \quad k = 0, 1, \ldots, a$$

Można pokazać, że jest to rozwiązanie jedyne. Stałe A i B muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} p_0 = A \\ p_1 = A + B \end{cases}$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, 1 \neq 0$, układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Odpowiedź: Wiedząc, że gracz dysponuje kapitałem k zł oraz że może on wygrać maksymalnie a zł, możemy stwierdzić, iż prawdopodobieństwo ruiny gracza wynosi $(1 - \frac{k}{a})$.

Bibliografia:

K. Chudy, *Zadanie o ruinie gracza i jego modyfikacje*, praca magisterska napisana pod kierunkiem dr Bogdana Mincera, Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyczny, Wrocław 1999

W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom 1, PWN, Warszawa 1977

P.Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987

A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984

G.M.Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 1, PWN, Warszawa 1985

A. Ruciński, *Wykład 1: Prosty spacer losowy z barierami*, 2008