Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - taryfa telefoniczna

Opracowanie: Katarzyna Hubicka, Kinga Leśniak, Patrycja Weiss

Zadanie:

(a) Załóżmy, że długość rozmowy telefonicznej w pewnej grupie abonentów ma rozkład wykładniczy, przy czym rozmowa trwa średnio 3 minuty. Minuta rozmowy kosztuje złotówkę, a operator stosuje rozliczenie minutowe (z góry). Jaki jest średni koszt rozmowy?

(b) Jaki byłby średni koszt rozmowy, gdyby operator stosował rozliczenie co 30 sekund (z góry)?

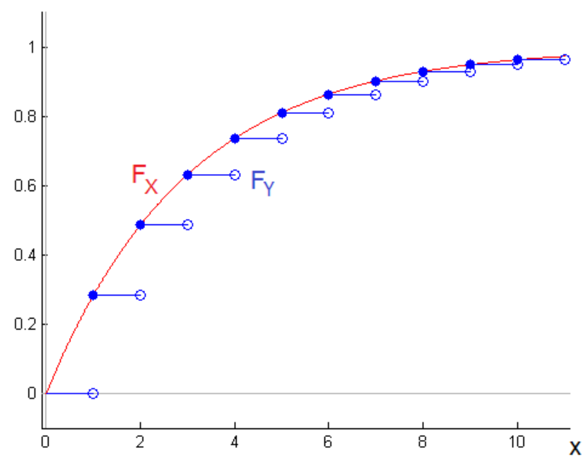
(c) Dla każdego z powyższych przypadków wyznacz wariancję kosztu rozmowy.

Rozwiązanie:

(a) **Rozliczenie minutowe z góry.**
Niech X oznacza długość rozmowy telefonicznej w minutach.
Wiemy, że X ma rozkład wykładniczy i $\mathrm{E}X = 3$ minuty, zatem $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ dla $\frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}X = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ i stąd dystrybuanta X to:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{3}x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Niech Y oznacza koszt rozmowy telefonicznej w zł.
$Y = 1\frac{\text{zł}}{\text{min}} \cdot n \text{ min} = n \text{ zł} \Leftrightarrow n - 1 < X \leqslant n$ dla $n = 1, 2, \ldots$
$Y = 0 \text{ zł} \Leftrightarrow X \leqslant 0$
Zatem Y ma rozkład dyskretny, zadany ciągiem $(y_n, p_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$
gdzie $y_n = n$
oraz $p_n = P(Y = n) = \begin{cases} P(n-1 < X \leqslant n) = 1 - e^{-\frac{1}{3}n} - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}(n-1)}\right) = e^{-\frac{1}{3}n}\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) & \text{dla } n = 1, 2, \ldots \\ P(X \leqslant 0) = 0 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$



Rysunek 1: Dystrybuanty F_X i F_Y

$$\mathrm{E}Y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n p_n = \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^n$$

Ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{dla } |x| < 1 \quad (\text{tutaj mamy } x = e^{-\frac{1}{3}} \in (-1,1)).$$

otrzymujemy, że

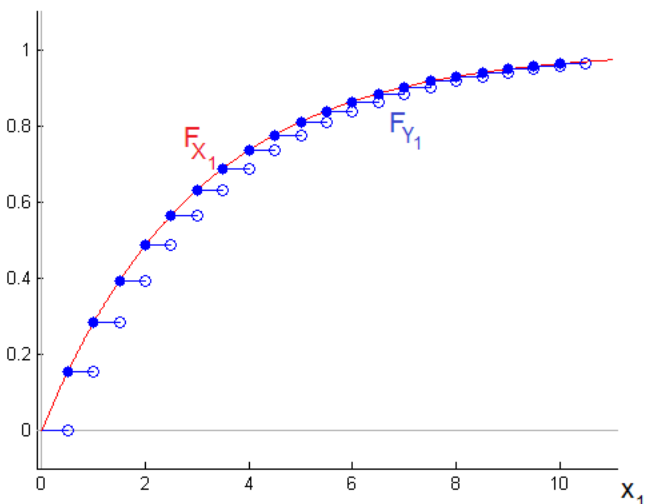
$$\mathrm{E}Y = \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{3}}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{3}}} \approx 3.53\text{zł}$$

(b) **Rozliczenie co 30 sekund.**

X_1 - długość rozmowy telefonicznej w nowych jednostkach (1 jedn.= 30 sekund)
$X_1 \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$,
$\mathrm{E}X_1 = 3 \text{ min} = 3 \cdot 2 \cdot 30 \text{ s} = 6 \text{ jedn.} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{6}$

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{6}x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Y_1 - koszt rozmowy telefonicznej
$Y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{zł}}{\text{jedn.}} \cdot n \text{ jedn.} = \frac{1}{2} \cdot n \text{ zł} \Leftrightarrow n - 1 < X_1 < n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$,
$Y_1 = 0 \text{ zł} \Leftrightarrow x_1 \leqslant 0$
Zatem Y_1 ma rozkład dyskretny zadany ciągiem: (y_n, p_n), $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,
gdzie $y_n = \frac{1}{2}n$,
a $p_n = P(Y_1 = \frac{1}{2}n) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{6}n}(e^{\frac{1}{6}} - 1) & \text{dla } n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$



Rysunek 2: Dystrybuanty F_{X_1} i F_{Y_1}

Średni koszt rozmowy to:

$$\mathrm{E}Y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} n \left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^n \left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{(1 - e^{-\frac{1}{6}})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - e^{-\frac{1}{6}})}{(1 - e^{-\frac{1}{6}})^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{6}}} \approx 3.26\text{zł}$$

(c) **Wariancje kosztu rozmowy.**

Rozliczanie minutowe:

$$\mathrm{D}^2Y = \sum_{1}^{\infty} n^2 \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^n \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) - (\mathrm{E}Y)^2 = \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) \sum_{1}^{\infty} n^2 \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^n - \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{3}}}\right)^2$$

Ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad \text{dla } |x| < 1 \quad (\text{tutaj mamy } x = e^{-\frac{1}{3}} \in (-1, 1))$$

otrzymujemy, że:

$$\mathrm{D}^2Y = \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{3}}\left(e^{-\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} = \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{3}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{3}} + 1 - 1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^2} \approx 8.92$$

Rozliczanie co 30 sekund:

$$\mathrm{D}^2Y_1 = \sum_{1}^{\infty} (\frac{1}{2}n)^2 \left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^n \left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) - (\mathrm{E}Y_1)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) \sum_{1}^{\infty} n^2 \left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^n - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{6}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{6}}\left(e^{-\frac{1}{6}} + 1\right)}{\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{6}} + 1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{6}} + 1 - 1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{4\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} \approx 8.98$$

Odp: Średni koszt rozmowy to 3.53 zł dla rozliczenia minutowego, a 3.26 zł dla rozliczenia co 30 sekund. Wariancje kosztów rozmowy to odpowiednio 8.92 i 8.98. Widzimy, że rozliczenie co 30 sekund jest dla abonenta bardziej opłacalne.