Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - tenisista

Opracowanie: Dominika Kubiak, Krystyna Zając, Taras Kostiuk

Zadanie:
Aby przejść do kolejnego etapu turnieju, tenisista musi wygrać dwa mecze pod rząd z trzech. Może grać:

(a) z lepszym, z gorszym i znów z tym samym lepszym

albo

(b) z gorszym, z lepszym i znów z tym samym gorszym.

Który wybór daje większe szanse przejścia do kolejnego etapu turnieju, jeśli wyniki kolejnych meczy są niezależne?

Rozwiązanie:
Czytając treść zadania, od razu nasuwa nam się odpowiedź, że wygrana dwa razy pod rząd jest bardziej prawopodobna grając w kolejności gorszy, lepszy, gorszy. Aby przekonać się, czy tak jest w rzeczywistości, rozwiążemy postawiony problem analitycznie.

Modelujemy sytuację:
A_i — zdarzenie, że wygrana nastąpi w i-tym meczu, gdzie $i = 1, 2, 3$,
B — zdarzenie, że tenisista wygrał dwa mecze pod rząd,
p_l — prawdopodobieństwo wygrania z lepszym graczem,
p_g — prawdopodobieństwo wygrania z gorszym graczem.

Z własności prawdopodobieństwa oraz z tego, że $p_l < p_g$, wiemy, że $0 \leqslant p_l < p_g \leqslant 1$. Zakładamy ponadto, że $p_l > 0$, ponieważ, gdyby p_l było równe 0, to prawdopodobieństwo wygranej dwóch meczy pod rząd wynosiłoby 0 dla obu przypadków (a) i (b).

Zdarzenia A_i to rodzina zdarzeń niezależnych (wzajemnie niezależnych).

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3),$$

gdzie sumujemy zdarzenia parami rozłączne.

Z niezależności zdarzeń A_i mamy:

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3). \tag{1}$$

WARIANT (a)

$$\begin{aligned} P(A_1) &= p_l & \qquad P(A_1^c) &= 1 - p_l \\ P(A_2) &= p_g & \qquad P(A_2^c) &= 1 - p_g \\ P(A_3) &= p_l & \qquad P(A_3^c) &= 1 - p_l \end{aligned}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości do wzoru (1) otrzymujemy szukane prawdopodobieństwo:

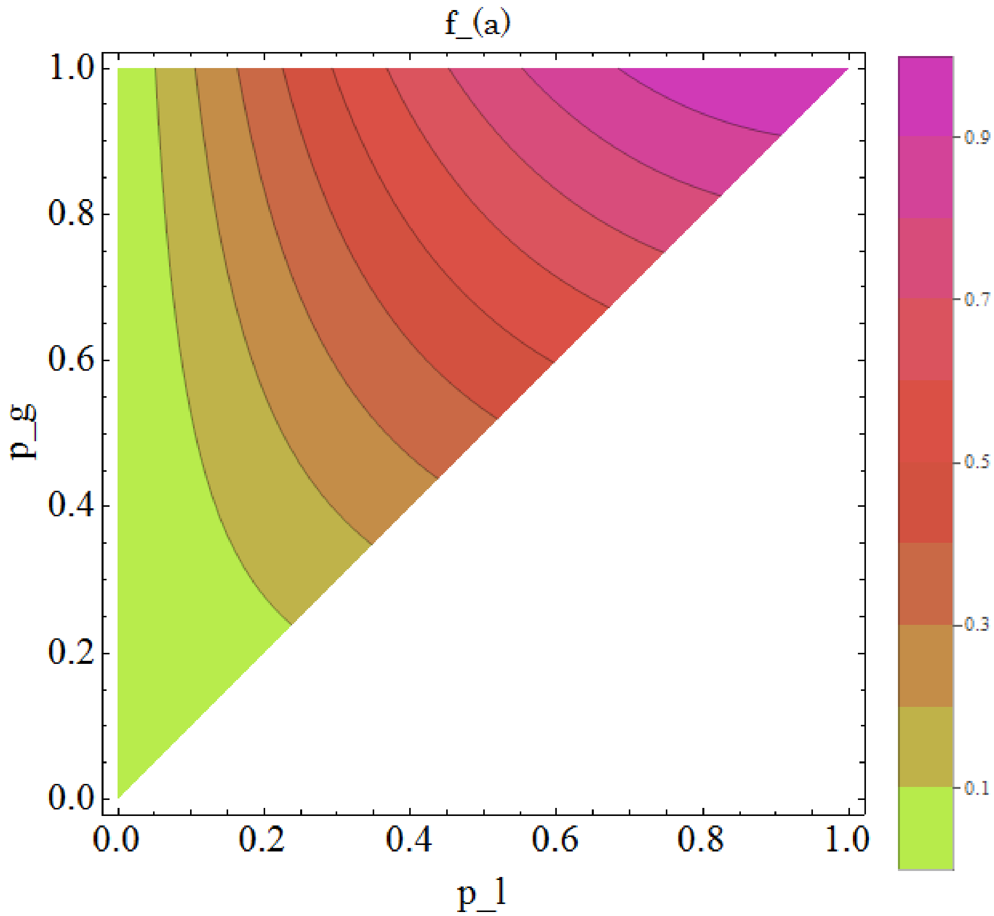
$$P(B) = p_l p_g p_l + p_l p_g (1 - p_l) + (1 - p_l) p_g p_l = p_l p_g p_l + 2(1 - p_l) p_l p_g = p_l p_g (p_l + 2 - 2p_l) = p_l p_g (2 - p_l).$$

Zatem otrzymaliśmy, że szukane prawdopodobieństwo wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantu (a), jako funkcja parametrów p_l, p_g ma postać

$$f_{(a)}(p_l, p_g) = p_l p_g (2 - p_l) \tag{2}$$

na trójkącie $\Delta = \{(p_l, p_g) : 0 < p_l < p_g \leqslant 1\}$.

Wykres funkcji $f_{(a)}(p_l, p_g)$ na Δ przedstawiony jest na Rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres prawdopodobieństwa wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantu (a) w zależności od p_l, p_g.

WARIANT (b)

$$\begin{aligned} P(A_1) &= p_g & \qquad P(A_1^c) &= 1 - p_g \\ P(A_2) &= p_l & \qquad P(A_2^c) &= 1 - p_l \\ P(A_3) &= p_g & \qquad P(A_3^c) &= 1 - p_g \end{aligned}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości do wzoru (1) otrzymujemy szukane prawdopodobieństwo:

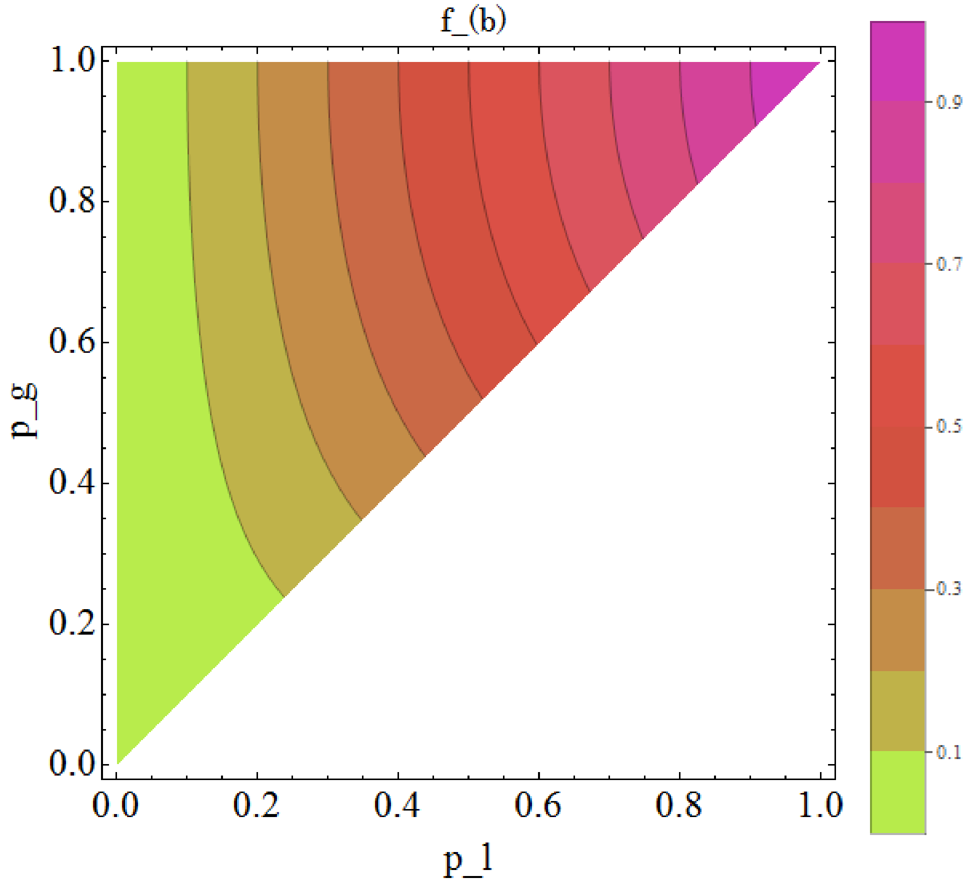
$$P(B) = p_g p_l p_g + p_g p_l (1 - p_g) + (1 - p_g) p_l p_g = p_g p_l p_g + 2 p_g p_l (1 - p_g) = p_l p_g (p_g + 2 - 2p_g) = p_l p_g (2 - p_g).$$

Zatem otrzymaliśmy, że szukane prawdopodobieństwo wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantu (b), jako funkcja parametrów p_l, p_g ma postać

$$f_{(b)}(p_l, p_g) = p_l p_g (2 - p_g) \tag{3}$$

na trójkącie $\Delta = \{(p_l, p_g) : 0 < p_l < p_g \leqslant 1\}$.

Wykres funkcji $f_{(b)}(p_l, p_g)$ na Δ przedstawiony jest na Rysunku 2.



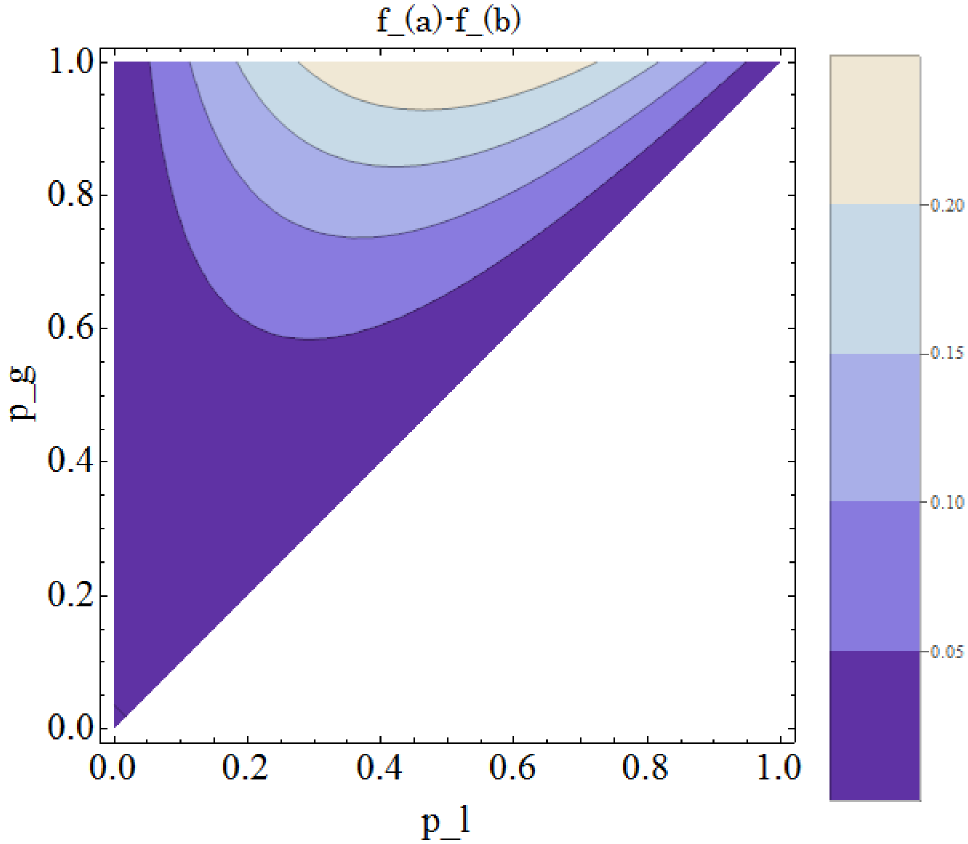
Rysunek 2: Wykres prawdopodobieństwa wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantu (b) w zależności od p_l, p_g.

PORÓWNANIE WARIANTÓW (a) i (b)

Zauważmy, że różnica między prawdopodobieństwem wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantów (a) i (b) wynosi

$$f_{(a)}(p_l, p_g) - f_{(b)}(p_l, p_g) = p_l p_g (p_g - p_l).$$

Ponieważ $p_l < p_g$, różnica ta jest zawsze dodatnia.
Można stwierdzić, że wariant (a), czyli gra w kolejności lepszy, gorszy, lepszy, daje większą szansę na wygraną. Na przykładzie tego zadania widzimy, że nasza intuicja może nas czasem mylić.
Jak istotne mogą być różnice w badanym prawdopodobieństwie pomiędzy tymi dwoma wariantami możemy zobaczyć na Rysunku 3. Dziedziną rozwiązania jest tutaj również trójkąt Δ.



Rysunek 3: Wykres różnicy prawdopodobieństw wygrania dwóch meczy pod rząd dla wariantów (a) i (b) w zależności od p_l, p_g.

Najciemniejszy kolor oznacza, że wybór wariantu właściwie nie ma znaczenia. Przykładowo, gdy wartość prawdopodobieństwa wygrania z graczem słabszym p_g jest bliska 1, a wartość prawdopodobieństwa wygrania z graczem lepszym p_l jest bliska 0, to różnica między prawdopodobieństwami wygrania dwa razy pod rząd w każdym z wariantów jest bardzo niewielka.
Im kolor jest jaśniejszy, tym lepszy jest wybór wariantu (a). Jak widzimy największa różnica na korzyść tego wariantu pojawia się tam, gdzie kolor jest beżowy, czyli wtedy, gdy wartość prawdopodobieństwa wygrania z graczem słabszym p_g jest bliska 1, a wartość prawdopodobieństwa wygrania z graczem lepszym p_l znajduje się pomiędzy 0.3 a 0.7.

Zatem możemy stwierdzić, że tenisista grając z lepszym graczem, następnie gorszym i ponownie z tym samym lepszym, ma większe szanse na przejście do kolejnego etapu turnieju.