Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - zadanie Steinhausa o zapałkach

Opracowanie: Paweł Budzyński

Zadanie:

Palacz nosi w kieszeni 2 pudełka zapałek. Za każdym razem, gdy zapala papierosa, bierze zapałkę z losowo wybranego pudełka i zużywa ją. Po pewnym czasie, wybierając jedno z pudełek stwierdza, że jest ono puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym momencie drugie pudełko będzie zawierało k zapałek, jeśli na początku każde pudełko zawierało n zapałek?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że wyciągnięcie zapałki z pudełka w lewej kieszeni oznaczamy jako L, w prawej kieszeni jako R. Zakładamy również, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia pudełka z lewej kieszeni, czyli również prawdopodobieństwo wyciągnięcia zapałki z niego, jest równe $p_L = \frac{1}{2}$. Wtedy dla prawej kieszeni mamy $p_R = \frac{1}{2}$.

Dla ustalonego $k \in \{0, 1, \dots n\}$ oznaczmy jako A_k zdarzenie, że w momencie wyciągnięcia pierwszego pustego pudełka w drugim wciąż znajduje się k zapałek. Dodatkowo, przez n oznaczmy ilość zapałek w jednym pudełku. Wtedy całkowita liczba zapałek wyniesie $2n$. Szukamy $P(A_k)$.

W celu rozwiązania problemu rozpatrzymy wyciąganie zapałek jako ciąg zdarzeń L i R, np. $L, R, L, L, R, R, R, L, \dots, L$, który kończy się, kiedy w ciągu $n+1$ -wszy raz pojawi się zdarzenie L (lub R), a równocześnie druga litera pojawiła się wcześniej nie więcej niż n razy. W takim wypadku zdarzenie A_k tworzą ciągi o długości $(n+1) + (n-k)$.

W pojedynczym ciągu ze zdarzenia A_k mamy

1. na pierwszych $2n-k$ miejscach n liter L i $n-k$ liter R oraz literę L na ostatnim miejscu - oznaczmy podzbiór takich ciągów jako $A_{k,L}$

albo

2. na pierwszych $2n-k$ miejscach n liter R i $n-k$ liter L oraz literę R na ostatnim miejscu - oznaczmy podzbiór takich ciągów jako $A_{k,R}$.

W rozważanych ciągach rozmieszczamy n liter jednego typu oraz $n-k$ liter drugiego typu na $n + (n-k) = 2n-k$ pozycjach. Możemy to zrobić na

$$\frac{(2n-k)!}{n! \cdot (n-k)!} = \binom{2n-k}{n} \quad \text{sposobów.}$$

Przypomnijmy że zgodnie z założeniem $p_L = p_R = \frac{1}{2}$. Zatem otrzymujemy następujący wzór na szukane prawdopodobieństwo:

$$P(A_k) = P(A_{k,L}) + P(A_{k,R}) = 2 \cdot \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-k} = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

dla $k = 0, 1, \dots, n$.