Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Czas dojazdu autobusem

Opracowanie: Klaudia Karpińska

Zadanie

Z pracy do domu możemy dojechać autobusem jednej z trzech linii: 333, 666 lub 999. Czas dojazdu autobusem do domu wynosi odpowiednio 12, 15 oraz 18 minut. Autobusy danej linii z przystanku odjeżdżają co piętnaście minut, przy czym autobusy linii 666 odjeżdżają o cztery minuty później niż 333, zaś autobusy linii 999 o sześć minut później niż 666. Przyjmując, że przychodzimy na przystanek autobusowy w losowym momencie, wyznaczyć rozkład czasu dojazdu do domu, średni czas dojazdu i jego odchylenie standardowe. Podać rozwiązanie zarówno bez, jak i z uwzględnieniem czasu oczekiwania na przystanku.

Rozwiązanie:

Niech T_0 oznacza moment przyjścia na przystanek liczony w minutach od chwili odjazdu ostatniego autobusu nr 333. Z treści zadania $T_0 \sim \mathcal{U}(0, 15]$, czyli

$$F_{T_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \leqslant 0, \\ \frac{t}{15}, & \text{gdy } 0 < t \leqslant 15, \\ 1, & \text{gdy } t > 15. \end{cases}$$

oraz

$$f_{T_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & \text{gdy } 0 < t \leqslant 15, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Gdy $0 < T_0 \leqslant 4$, to na przystanku będziemy czekać $4 - T_0$ minut, a jechać do domu autobusem 666. Gdy $4 < T_0 \leqslant 10$, to do domu dostaniemy się autobusem 999 po oczekiwaniu $10 - T_0$ minut, a gdy $10 < T_0 \leqslant 15$ odjeżdżać będziemy po $15 - T_0$ minutach autobusem 333.

(a) **Przypadek bez uwzględnienia czasu oczekiwania na autobus :**
Oznaczmy przez T czas dojazdu do domu (tylko jazda autobusem). Mamy

$$T = \begin{cases} 15 \text{ (czas dojazdu autobusem 666)}, & \text{gdy } 0 < T_0 \leqslant 4, \\ 18 \text{ (czas dojazdu autobusem 999)}, & \text{gdy } 4 < T_0 \leqslant 10, \\ 12 \text{ (czas dojazdu autobusem 333)}, & \text{gdy } 10 < T_0 \leqslant 15. \end{cases}$$

Widzimy, że T przyjmuje trzy wartości $x_1 = 12, x_2 = 15, x_3 = 18$ z prawdopodobieństwami:

- $p_1 = P(T = 12) = P(10 < T_0 \leqslant 15) = \frac{5}{15}$,
- $p_2 = P(T = 15) = P(0 < T_0 \leqslant 4) = \frac{4}{15}$,
- $p_3 = P(T = 18) = P(4 < T_0 \leqslant 10) = \frac{6}{15}$.

Podsumowując, T ma rozkład dyskretny podany w tabeli:

$T \sim$

n	1	2	3
x_n	12	15	18
p_n	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$

Aby otrzymać średni czas dojazdu do domu, należy wyliczyć wartość oczekiwaną (średnią) zmiennej losowej T.

I sposób (bezpośrednio z rozkładu zmiennej losowej T):

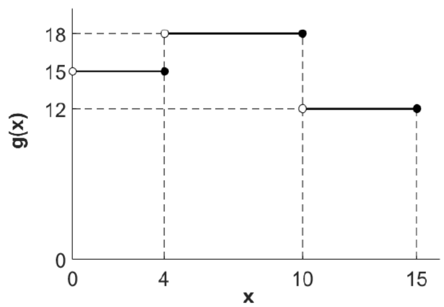
$\mathrm{E}T = \sum_{n=1}^{3} x_n p_n = 12 \cdot \frac{5}{15} + 15 \cdot \frac{4}{15} + 18 \cdot \frac{6}{15} = 15.2 =$15 minut 12 sekund.

II sposób (dla T jako transformacji zmiennej losowej T_0 z wykorzystaniem rozkładu T_0):

$$T = g(T_0),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 15, & \text{gdy } x \in (0,4], \\ 18, & \text{gdy } x \in (4,10], \\ 12, & \text{gdy } x \in (10,15]. \end{cases}$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $g(x)$.

Stąd

$$\mathrm{E}T = \mathrm{E}g(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{T_0}(x)dx = \int_0^4 15 \cdot \frac{1}{15} dx + \int_4^{10} 18 \cdot \frac{1}{15} dx + \int_{10}^{15} 12 \cdot \frac{1}{15} dx = \frac{76}{5} = 15.2 = 15 \text{ minut } 12 \text{ sekund.}$$

Wniosek: Średni czas dojazdu autobusem wynosi 15 minut 12 sekund.

Obliczamy odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2 T}$, gdzie $\mathrm{D}^2 T = \mathrm{E}T^2 - (\mathrm{E}T)^2$.

I sposób:

$$\mathrm{E}T^2 = \sum_{k=1}^{3} x_n^2 p_n = 12^2 \cdot \frac{5}{15} + 15^2 \cdot \frac{4}{15} + 18^2 \cdot \frac{6}{15} = 237.6$$

II sposób:

$$\mathrm{E}T^2 = \mathrm{E}g^2(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_{T_0}(x)dx = \int_0^4 15^2 \cdot \frac{1}{15} dx + \int_4^{10} 18^2 \cdot \frac{1}{15} dx + \int_{10}^{15} 12^2 \cdot \frac{1}{15} dx = 237.6$$

Zatem

$$\mathrm{D}^2 T = 237.6 - (15.2)^2 = 6.56 = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{6.56} \approx 2.56 \approx 2 \text{ minuty } 34 \text{ sekundy}$$

Wniosek: Odchylenie standardowe czasu dojazdu autobusem wynosi około 2 minuty 34 sekundy.

(b) **Przypadek z uwzględnienieniem czasu oczekiwania na autobus :**
Oznaczmy przez S czas dojazdu do domu wraz z czasem oczekiwania na autobus. Mamy

$$S = \begin{cases} 4 - T_0 + 15, & \text{gdy } 0 < T_0 \leqslant 4, \\ 10 - T_0 + 18, & \text{gdy } 4 < T_0 \leqslant 10, \\ 15 - T_0 + 12, & \text{gdy } 10 < T_0 \leqslant 15. \end{cases}$$

Aby wyznaczyć rozkład zmiennej losowej S, należy znaleźć dystrybuantę $F_S(x)$ tej zmiennej losowej. Mamy

$$F_S(x) = P(S < x) = P(4 - T_0 + 15 < x \text{ i } 0 < T_0 \leqslant 4) + P(10 - T_0 + 18 < x \text{ i } 4 < T_0 \leqslant 10) +$$

$$+P(15 - T_0 + 12 < x \text{ i } 10 < T_0 \leqslant 15)$$

Przyjmijmy, że :

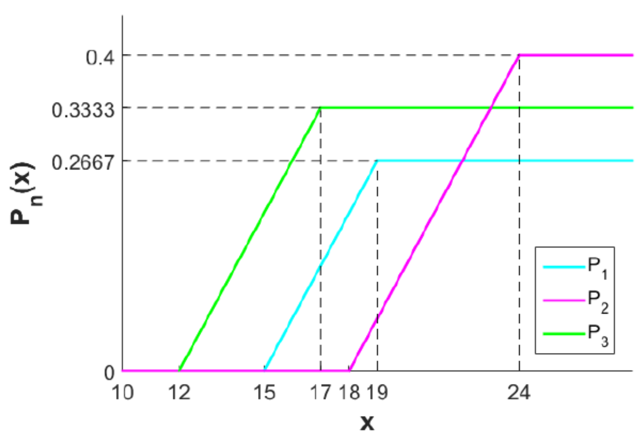
$$\begin{aligned} P_1(x) &:= P(4 - T_0 + 15 < x, 0 < T_0 \leqslant 4), \\ P_2(x) &:= P(10 - T_0 + 18 < x, 4 < T_0 \leqslant 10), \\ P_2(x) &:= P(15 - T_0 + 12 < x, 10 < T_0 \leqslant 15). \end{aligned}$$

Wtedy $F_S(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$. Wyliczamy

$$P_1(x) = P(19 - T_0 < x, 0 < T_0 \leqslant 4) = P(T_0 > 19 - x, 0 < T_0 \leqslant 4) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 15, \\ \frac{x-15}{15}, & \text{gdy } 15 < x \leqslant 19, \\ \frac{4}{15}, & \text{gdy } x > 19. \end{cases}$$

$$P_2(x) = P(28 - T_0 < x, 4 < T_0 \leqslant 10) = P(T_0 > 28 - x, 4 < T_0 \leqslant 10) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 18, \\ \frac{x-18}{15}, & \text{gdy } 18 < x \leqslant 24, \\ \frac{6}{15}, & \text{gdy } x > 24. \end{cases}$$

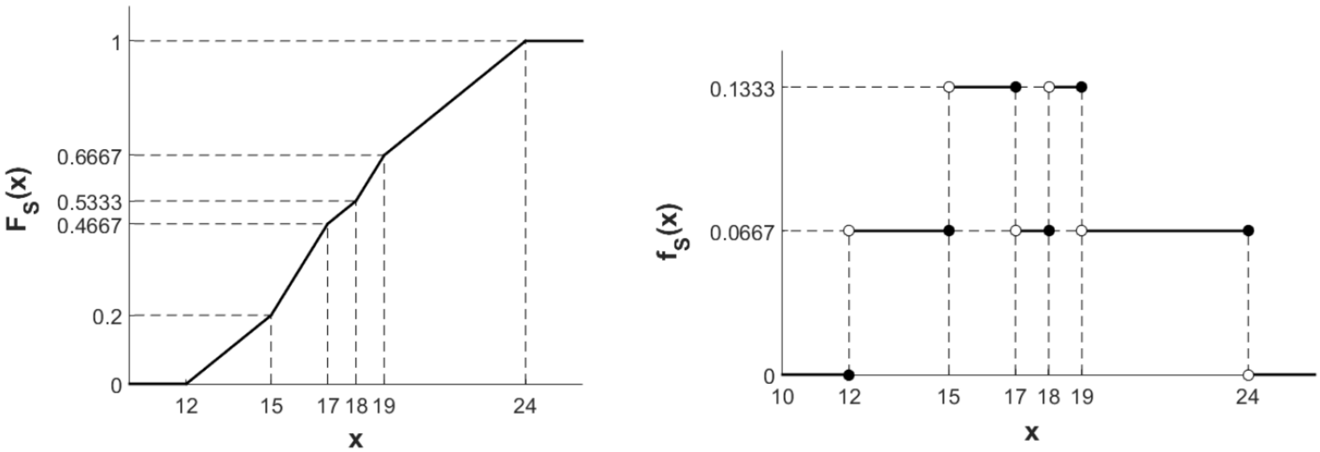
$$P_3(x) = P(27 - T_0 < x, 10 < T_0 \leqslant 15) = P(T_0 > 27 - x, 10 < T_0 \leqslant 15) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 12, \\ \frac{x-12}{15}, & \text{gdy } 12 < x \leqslant 17, \\ \frac{5}{15}, & \text{gdy } x > 17. \end{cases}$$



Rysunek 2: Wykres funkcji $P_n(x), n = 1, 2, 3$.

Z pomocą wykresu na rysunku 2. możemy łatwo wyznaczyć sumę funkcji $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ i ostatecznie otrzymać szukane $F_S(x)$:

$$F_S(x) = P(S < x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 12, \\ \frac{x-12}{15}, & \text{gdy } 12 < x \leqslant 15, \\ \frac{x-12}{15} + \frac{x-15}{15} = \frac{2x-27}{15}, & \text{gdy } 15 < x \leqslant 17, \\ \frac{x-15}{15} + \frac{5}{15} = \frac{x-10}{15}, & \text{gdy } 17 < x \leqslant 18, \\ \frac{x-15}{15} + \frac{x-18}{15} + \frac{5}{15} = \frac{2x-28}{15}, & \text{gdy } 18 < x \leqslant 19, \\ \frac{x-18}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{x-9}{15}, & \text{gdy } 19 < x \leqslant 24, \\ 1, & \text{gdy } x > 24. \end{cases}$$



Rysunek 3: Wykresy dystrybuanty $F_S(x)$ i gęstości $f_S(x)$ zmiennej losowej S.

Dystrybuanta $F_S(x)$ jest ciągła i różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów, zatem S ma rozkład ciągły o gęstości:

$$f_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{poza tym}, \\ \frac{1}{15}, & x \in (12, 15] \cup (17, 18] \cup (19, 24], \\ \frac{2}{15}, & x \in (15, 17] \cup (18, 19]. \end{cases}$$

Aby otrzymać średni czas dojazdu do domu (z uwzględnieniem czasu oczekiwania na autobus), należy wyliczyć wartość oczekiwaną (średnią) zmiennej losowej S.

I sposób: (bezpośrednio z rozkładu zmiennej losowej S):

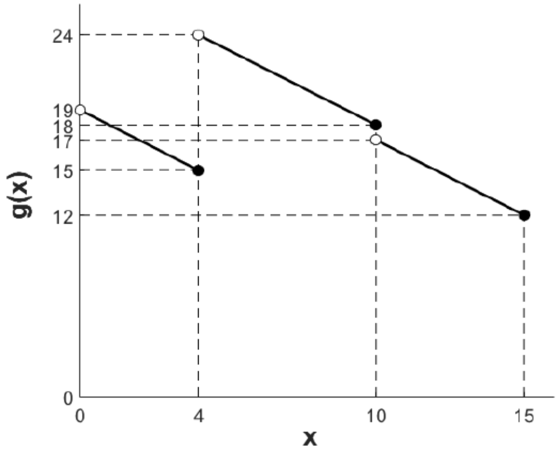
$$\begin{aligned} \mathrm{E}S &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_s(x)dx = \int_{12}^{15} x \cdot \frac{1}{15}dx + \int_{12}^{15} x \cdot \frac{1}{15}dx + \int_{15}^{17} x \cdot \frac{2}{15}dx + \int_{17}^{18} x \cdot \frac{1}{15}dx + \int_{18}^{19} x \cdot \frac{2}{15}dx + \int_{19}^{24} x \cdot \frac{1}{15}dx = \\ &= \frac{533}{30} = 17 \text{ minut } 46 \text{ sekund} \end{aligned}$$

II sposób (dla S jako transformacji zmiennej losowej T_0 z wykorzystaniem rozkładu T_0):

$$S = g(T_0),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x - 15 = 19 - x, & \text{gdy } x \in (0, 4], \\ 10 - x + 18 = 28 - x, & \text{gdy } x \in (4, 10], \\ 15 - x + 12 = 27 - x, & \text{gdy } x \in (10, 15]. \end{cases}$$



Rysunek 4: Wykres funkcji $g(x)$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{E}S &= \mathrm{E}g(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{T_0}(x)dx = \int_0^4 (19-x)\cdot\frac{1}{15}dx + \int_4^{10}(28-x)\cdot\frac{1}{15}dx + \int_{10}^{15}(27-x)\cdot\frac{1}{15}dx = \\ &= \frac{533}{30} = 17 \text{ minut } 46 \text{ sekund} \end{aligned}$$

Wniosek: Średni czas dojazdu z uwzględnieniem czasu oczekiwania na autobus wynosi 17 minut 46 sekund.

Obliczamy odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2 S}$, gdzie $\mathrm{D}^2 S = \mathrm{E}S^2 - (\mathrm{E}S)^2$.

I sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}S^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_s(x)dx = \\ &= \int_{12}^{15} x^2\cdot\frac{1}{15}dx + \int_{12}^{15} x^2\cdot\frac{1}{15}dx + \int_{15}^{17} x^2\cdot\frac{2}{15}dx + \int_{17}^{18} x^2\cdot\frac{1}{15}dx + \int_{18}^{19} x^2\cdot\frac{2}{15}dx + \int_{19}^{24} x^2\cdot\frac{1}{15}dx = \\ &= \frac{14661}{45} = 325.8 \end{aligned}$$

II sposób:

$$\mathrm{E}S^2 = \mathrm{E}g^2(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_{T_0}(x)dx = \int_0^4 (19-x)^2\cdot\frac{1}{15}dx + \int_4^{10}(28-x)^2\cdot\frac{1}{15}dx + \int_{10}^{15}(27-x)^2\cdot\frac{1}{15}dx = 325.8$$

Zatem

$$\mathrm{D}^2 S = 325.8 - \left(\frac{533}{30}\right)^2 = 10.027 = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{10.027} \approx 3.167 \approx 3 \text{ minuty } 10 \text{ sekund}$$

Wniosek: Odchylenie standardowe czasu dojazdu z uwzględnieniem czasu oczekiwania na autobus wynosi około 3 minuty 10 sekund.