Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Gra bazująca na schemacie Bernoulliego

Opracowanie: Paulina Napierała

Zadanie:

Za pomocą doświadczeń wykonywanych zgodnie z warunkami schematu Bernoulliego (z prawdopodobieństwem p sukcesu w pojedynczym doświadczeniu) określamy następującą grę. Osoba decydująca się na udział w grze przeprowadza jedno doświadczenie Bernoulliego (np. rzuca monetą, kostką, losuje ze zwrotem). Gdy wynikiem tego doświadczenia jest porażka, wtedy osoba ta płaci m zł. Natomiast w przypadku sukcesu, powtarza to doświadczenie aż do pojawienia się porażki, otrzymując a^{k-1} zł, jeśli porażka ta zaszła w k-tym doświadczeniu, k=2, 3, … (gdzie stała $a > 0$). Wygrana osoby, która jeden raz wzięła udział w grze, jest zmienną losową W przyjmującą wartości: $-m$, a^1, a^2, … Gra nazywa się sprawiedliwą, gdy wartość przeciętna wygranej jest równa zeru: $\mathrm{E}W = 0$.

a) Przy ustalonych p i a dobrać tak m, aby gra była sprawiedliwa.

b) Przy ustalonych p i m dobrać tak a, aby gra była sprawiedliwa. Obliczyć a, jeśli:

- $m = 1$, $p = \frac{1}{2}$
- $m = \frac{1}{5}$, $p = \frac{1}{6}$
- $m = 1$, $p = \frac{1}{6}$
- $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$
- $m = 5$, $p = \frac{1}{6}$

c) Przy jakich wartościach a, gdy ustalone są wartości p i m, gra byłaby krzywdząca dla:

- osoby podejmującej grę?
- właściciela gry?

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo sukcesu to p, prawdopodobieństwo porażki to $q = 1 - p$.
- Przez Y oznaczmy czas oczekiwania na pierwszą porażkę. Zmienna losowa Y przyjmuje wartości $k = 1, 2, 3, \ldots$ z prawdopodobieństwami $P(Y = k) = qp^{k-1}$.
- Gdy wynikiem pierwszego doświadczenia jest porażka (czyli $Y = 1$), to płacimy m zł. Mamy zatem:
$$P(W = -m) = P(Y = 1) = qp^0 = q$$
- Gdy wynikiem pierwszego doświadczenia jest sukces, to doświadczenie powtarzamy aż do wystąpienia porażki, zarabiając a^{k-1} zł, gdzie k to numer doświadczenia, w którym porażka zaszła, $k > 1$. Mamy zatem:
$$P(W = a^{k-1}) = P(Y = k) = qp^{k-1} \text{ dla } k = 2, 3, \ldots$$
- Możemy zatem zapisać, że wygrana W jest funkcją zmiennej losowej Y (czasu oczekiwania na pierwszą porażkę).
$$W = \begin{cases} -m, \text{ gdy } Y = 1 \\ a^{Y-1}, \text{ gdy } Y > 1 \end{cases}$$

- Dyskretny rozkład zmiennej losowej W jest zadany ciągiem $\{(w_k, p_k), k = 1, 2, \ldots\}$, gdzie

$$w_k = \begin{cases} -m \text{ dla } k = 1 \\ a^{k-1} \text{ dla } k > 1 \end{cases}, \; p_k = qp^{k-1}$$

- Korzystając ze wzoru na wartość oczekiwaną dla rozkładu dyskretnego, możemy znaleźć $\mathrm{E}W$.

$$\mathrm{E}W = \sum_{k=1}^{\infty} w_k p_k = -mq + q\sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}p^{k-1} = q(-m + \sum_{k=2}^{\infty}(ap)^{k-1}), \text{ gdzie } m, a > 0 \text{ i } 0 < p < 1, q = 1-p.$$

Szereg ten jest zbieżny $\iff$ $|ap| < 1$. Zatem $\mathrm{E}W$ istnieje $\iff$ $a < \frac{1}{p}$ przy $m, a > 0$, $0 < p < 1$. Ponadto, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, otrzymujemy:

$$\mathrm{E}W = q(-m + \frac{ap}{1-ap})$$

Rozwiązanie podpunktu a):
Gdy wartości $p \in (0,1)$ i $a > 0$ są ustalone, przy czym $ap \in (0,1)$, gra będzie sprawiedliwa dla takiego m, że:

$$\mathrm{E}W = q(-m + \frac{ap}{1-ap}) = 0$$
$$\iff m = \frac{ap}{1-ap}$$

Rozwiązanie podpunktu b):
Gdy wartości $p \in (0,1)$ i $m > 0$ są ustalone, gra będzie sprawiedliwa dla takiego a, że:

$$\mathrm{E}W = q(-m + \frac{ap}{1-ap}) = 0 \text{ i } ap \in (0,1)$$
$$\iff 0 = -m(1-ap) + ap, \; 0 < ap < 1$$
$$\iff 0 = -m + map + ap, \; 0 < ap < 1$$
$$\iff m = ap(m+1), \; 0 < ap < 1$$
$$\iff a = \frac{m}{p(m+1)}, \text{ (bo wtedy } ap = \frac{m}{m+1} \in (0,1))$$

W dalszej części dla ustalonych wartości $m > 0$ i $p \in (0,1)$ obliczamy a z powyższego wzoru, aby ustalić wartość parametru dla gry sprawiedliwej:

- $m = 1$, $p = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+1)} = 1$
- $m = \frac{1}{5}$, $p = \frac{1}{6} \Longrightarrow a = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{6}(\frac{1}{5}+1)} = 1$
- $m = 1$, $p = \frac{1}{6} \Longrightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{6}(1+1)} = 3$
- $m = 2$, $p = \frac{1}{6} \Longrightarrow a = \frac{2}{\frac{1}{6}(2+1)} = 4$
- $m = 5$, $p = \frac{1}{6} \Longrightarrow a = \frac{5}{\frac{1}{6}(5+1)} = 5$

Wnioski:

- Z powyższego wzoru $a = \frac{m}{p(m+1)}$ i przykładowych obliczeń łatwo stwierdzić, że im trudniejsza gra (prawdopodobieństwo sukcesu mniejsze), tym a dla gry sprawiedliwej jest większe przy ustalonym stałym m, a co za tym idzie - stawka w przypadku wygranej większa.

- Przy ustalonym p możemy tak dobrać m dla gry sprawiedliwej, żeby a miało wartość 1. Takie m to $m = \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}$. W takim przypadku niezależnie od tego, czy pierwsza porażka pojawi się w drugim, czy w kolejnym doświadczeniu, gracz zyska $1^{Y-1} = 1$ zł. (Oczywiście, gdy porażka pojawi się w pierwszej próbie, gracz straci $m = \frac{p}{q}$ zł.)

Rozwiązanie podpunktu c):

- Gdy wartości $p \in (0,1)$ i $m > 0$ są ustalone, gra jest krzywdząca dla osoby podejmującej grę, gdy $\mathrm{E}W < 0$, (ponieważ wtedy na mocy Prawa Wielkich Liczb można oczekiwać, że osoba ta poniesie stratę wielokrotnie grając w tę grę). Szukamy $a > 0$, dla którego:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}W < 0 \text{ i } ap < 1 \\ \iff &ap(m+1) - m < 0 \text{ i } ap < 1 \\ \iff &0 < a < \frac{m}{p(m+1)} \end{aligned}$$

- Gdy wartości $p \in (0,1)$ i $m > 0$ są ustalone, gra jest krzywdząca dla właściciela gry, gdy $\mathrm{E}W > 0$, (ponieważ wtedy na mocy Prawa Wielkich Liczb można oczekiwać, że właściciel straci przy wielokrotnych powtórzeniach tej gry). Szukamy zatem $a > 0$, dla którego:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}W > 0 \text{ i } ap < 1 \\ \iff &ap(m+1) - m > 0 \text{ i } ap < 1 \\ \iff &\frac{1}{p} > a > \frac{m}{p(m+1)} \end{aligned}$$

(Gdy $a \geqslant \frac{1}{p}$, $\mathrm{E}W = \infty$, więc także dla takich a gra jest krzywdząca dla właściciela gry.)