Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - łączny czas oczekiwania na autobusy

Opracowanie: Natalia Duda

Zadanie (łączny czas oczekiwania na autobusy):
Student jedzie do domu kolejno dwoma autobusami, z których każdy przyjeżdża na przystanek co 10 minut niezależnie jeden od drugiego. Zakładając, że student przychodzi na przystanek w losowo wybranej chwili oraz że czas oczekiwania na poszczególne autobusy ma rozkład jednostajny, oblicz prawdopodobieństwo tego, że łączny czas oczekiwania na przystankach nie przekracza 17 minut. Wylicz także średni łączny czas oczekiwania.

Rozwiązanie:

- Niech X oznacza czas oczekiwania na pierwszy autobus, a Y czas oczekiwania na drugi autobus (w minutach). Z treści zadania są to zmienne losowe niezależne o takim samym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,10)$ (na odcinku $[0,10]$, bo autobusy przyjeżdżają co 10 minut). Zatem

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{dla } x \in [0,10]\,, \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,10]\,. \end{cases}$$

$$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{dla } y \in [0,10]\,, \\ 0 & \text{dla } y \notin [0,10]\,. \end{cases}$$

- (X,Y) to wektor losowy złożony z niezależnych zmiennych losowych X i Y, a zatem

$$(X,Y) \sim f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{dla } x \in [0,10] \wedge y \in [0,10]\,, \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,10] \vee y \notin [0,10]\,. \end{cases}$$

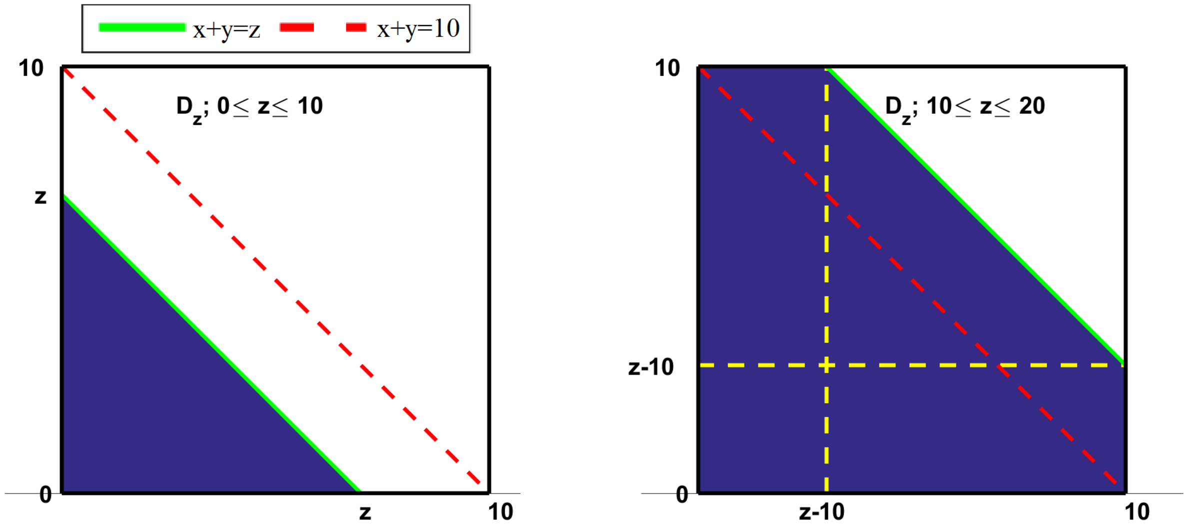
- Niech Z oznacza łączny czas oczekiwania na przystankach, czyli $Z = X + Y$. Wyznaczmy dystrybuantę zmiennej losowej Z

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) = P((X,Y) \in C_z)\,, \text{ gdzie } C_z = \{(x,y) \colon x + y < z\}.$$

Zatem $F_Z(z) = \iint\limits_{C_z} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$. Ze względu na postać $f_{(X,Y)}$ otrzymujemy

$$F_Z(z) = \begin{cases} \iint\limits_{D_z} \frac{1}{100} dxdy & \text{dla } z \in [0,20]\,, \\ 0 & \text{dla } z \notin [0,20]\,, \end{cases}$$

gdzie $D_z = \{(x,y) \colon x + y < z \wedge 0 \leqslant x \leqslant 10 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 10\}$.



Rozważmy dwa przypadki
1° Gdy $0 \leqslant z \leqslant 10$, to:

$D_z = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant z \wedge 0 \leqslant y \leqslant z-x\}$ i otrzymujemy

$$F_Z(z) = \iint\limits_{D_z} \frac{1}{100} dxdy = \int\limits_0^z \left(\int\limits_0^{z-x} \frac{1}{100} dy \right) dx = \frac{1}{100} \int\limits_0^z (z-x) dx = \frac{1}{200} z^2.$$

2° Gdy $10 \leqslant z \leqslant 20$, to:

$D_z = [0,10] \times [0,10] \setminus D'_z$, gdzie $D'_z = \{(x,y)\colon z-10 \leqslant x \leqslant 10 \wedge z-x \leqslant y \leqslant 10\}$

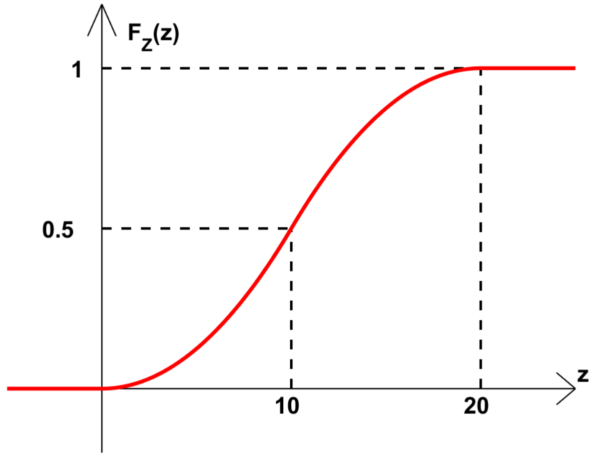
i $F_Z(z) = \iint\limits_{[0,10]\times[0,10]} \frac{1}{100} dxdy - \iint\limits_{D'_z} \frac{1}{100} dxdy = 1 - \iint\limits_{D'_z} \frac{1}{100} dxdy = 1 - \int\limits_{z-10}^{10} \left(\int\limits_{z-x}^{10} \frac{1}{100} dy \right) dx =$

$$= 1 - \frac{1}{100} \int\limits_{z-10}^{10} (10 - z + x)\, dx = 1 - \frac{1}{100} \left(10\,(20-z) - z(20-z) + \frac{1}{2} \left(100 - (20-z)^2 \right) \right) =$$

$$= 1 - \frac{(20-z)^2}{200}.$$

Podsumowując, dystrybuanta zmiennej losowej Z jest postaci

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \in (-\infty, 0]\,, \\ \frac{1}{200} z^2 & \text{dla } z \in (0, 10]\,, \\ 1 - \frac{(20-z)^2}{200} & \text{dla } z \in (10, 20]\,, \\ 1 & \text{dla } z \in (20, \infty)\,. \end{cases}$$



Prawdopodobieństwo tego, że łączny czas oczekiwania na przystankach nie przekracza 17 minut wynosi

$$P(Z < 17) = F_Z(17) = 1 - \frac{9}{200} = \frac{191}{200} = 0,995 \; .$$

Średni łączny czas oczekiwania to

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\,(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y = \frac{0+10}{2} + \frac{0+10}{2} = 10 \; ,$$

gdzie wykorzystaliśmy znany fakt, że wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na danym odcinku to środek tego odcinka.

EZ można też wyliczyć bezpośrednio z rozkładu zmiennej losowej Z, ale jest to dużo bardziej czasochłonne niż zastosowana przez nas metoda.