Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

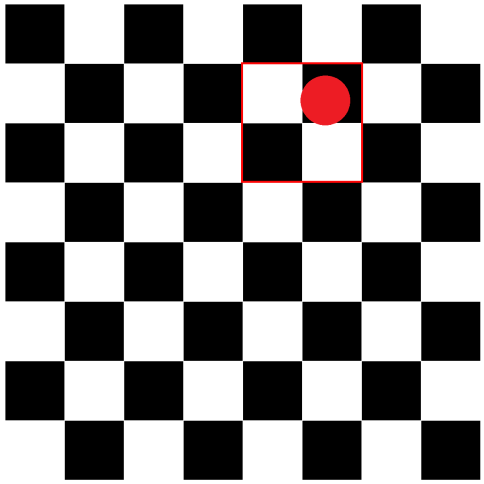
Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - rzut monetą na szachownicę

Opracowanie: Paulina Brzozowska

Zadanie:

Na nieskończoną szachownicę o boku a rzucamy monetą o średnicy $2r < a$, patrz Rysunek 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta spadnie na obszar trzech pól?



Rysunek 1: Rzut monetą na szachownicę.

Rozwiązanie:

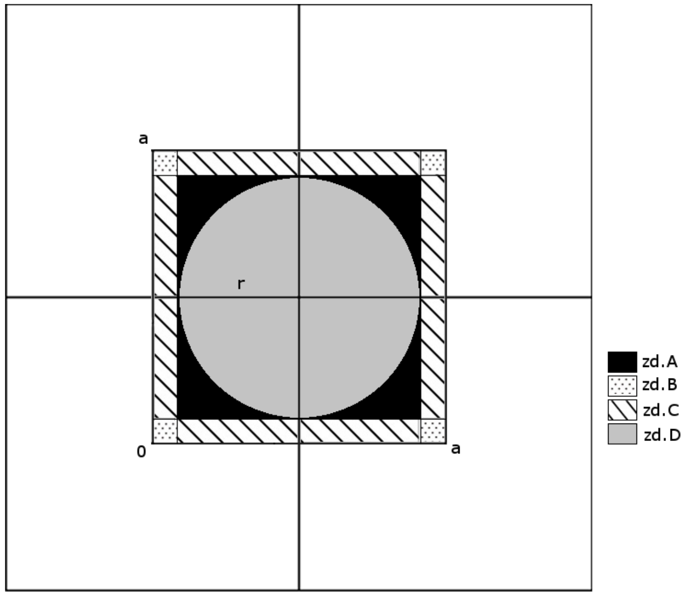
Po każdym rzucie moneta upada na pewne pole szachownicy i możemy wyznaczyć wierzchołek tego pola szachownicy najbliższy środkowi monety S (poza przypadkiem, gdy S pokrywa się ze środkiem pola). Zatem wynik rzutu monetą możemy utożsamić z wylosowaniem punktu (środka monety) z ćwiartki pola szachownicy. Ponieważ interesuje nas liczba pól szachownicy, na które upadnie moneta, wygodniej jest przyjąć za przestrzeń stanów kwadrat składający się z czterech ćwiartek pól szachownicy 2×2, o środku pokrywającym się ze środkiem tej szachownicy, patrz Rysunek 2. Przestrzenią probabilistyczną modelującą rzut monetą na szachownicę będzie zatem:

- $\Omega = [0, a] \times [0, a] = \{(x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant a\}$,
  $\mathcal{F}$ - borelowskie podzbiory zbioru Ω,
  P - prawdopodobieństwo geometryczne.

Oznaczmy przez A - zdarzenie polegające na tym, że moneta leży na 3 polach. Szukamy $P(A)$.

Łatwo stwierdzić, że

- zdarzenie polegające na tym, że moneta leży na 1 polu to
  $B = [0, \frac{a}{2} - r] \times [0, \frac{a}{2} - r] \cup [0, \frac{a}{2} - r] \times [\frac{a}{2} + r, a] \cup [\frac{a}{2} + r, a] \times [\frac{a}{2} + r, a] \cup [\frac{a}{2} + r, a] \times [0, \frac{a}{2} - r]$,
- zdarzenie polegające na tym, że moneta leży na 2 polach to
  $C = [0, \frac{a}{2} - r] \times [\frac{a}{2} - r, \frac{a}{2} + r] \cup [\frac{a}{2} - r, \frac{a}{2} + r] \times [\frac{a}{2} + r, a] \cup [\frac{a}{2} + r, a] \times [\frac{a}{2} - r, \frac{a}{2} + r] \cup [\frac{a}{2} - r, \frac{a}{2} + r] \times [0, \frac{a}{2} - r]$,
- zdarzenie polegające na tym, że moneta leży na 4 polach to
  $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \Omega : (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 \leqslant r^2\}$,
- $A = \Omega \setminus (B \cup C \cup D)$, przy czym B, C, D są rozłączne,



Rysunek 2: Przestrzeń probabilistyczna modelująca rzut monetą na szachownicę.

patrz Rysunek 2. Moneta znajduje się na 3 polach wtedy, gdy jej środek należy do obszaru zaznaczonego na czarno Rysunku 2.

Otrzymujemy

- pole $\Omega = a^2$
- pole $A =$ pole $\Omega -$ (pole $B +$ pole $C +$ pole $D) = a^2 - (4 \cdot (\frac{a}{2} - r)^2 + 4 \cdot 2r \cdot (\frac{a}{2} - r) + \pi r^2) =$
  $= a^2 - a^2 + 4ar - 4r^2 - 4ar + 8r^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2 = r^2(4 - \pi)$
- $P(A) = \dfrac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega} = \dfrac{r^2(4-\pi)}{a^2}$.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że moneta rzucona na nieskończoną szachownicę spadnie na obszar trzech pól wynosi $\dfrac{r^2(4-\pi)}{a^2}$.