Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - zmywanie

Opracowanie: Katarzyna Kluba, Maja Sajkowska, Patrycja Zajda

Zadanie:
Mąż i żona zawarli następującą umowę: Jeżeli w danym dniu naczynia myje mąż, to o tym, kto myje naczynia w dniu następnym, decyduje rzut monetą. Jeżeli w pewnym dniu naczynia myje żona, to w dniu następnym naczynia myje mąż. W pierwszym dniu umowy o tym, kto myje naczynia, decyduje rzut monetą. Oblicz:

(a) prawdopodobieństwo tego, że w trzecim dniu umowy naczynia myje mąż;

(b) prawdopodobieństwo tego, że w trzech pierwszych dniach umowy naczynia mył mąż, o ile wiadomo, że mył on naczynia w dniu czwartym;

(c) prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym tygodniu umowy mąż i żona myli naczynia na przemian;

(d) $\lim_{n\to\infty} p_n$, gdzie p_n to prawdopodobieństwo tego, że w n-tym dniu umowy naczynia myje mąż.

Rozwiązanie:
Wprowadzamy oznaczenia:
A_n - zdarzenie, że w n-tym dniu naczynia zmywa mąż, $p_n = P(A_n)$, gdzie $n = 1, 2, 3 \ldots$
Wtedy A_n^c - zdarzenie, że w n-tym dniu naczynia zmywa żona.

(I) Mamy:
$p_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$
$P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2|A_1^c) = 1$,
ogólnie dla $n = 1, 2, \ldots$
$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{1}{2}$, $P(A_{n+1}|A_n^c) = 1$
i stąd:
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|A_n^c)P(A_n^c) = \frac{1}{2}P(A_n) + 1(1 - P(A_n)) = 1 - \frac{1}{2}p_n$.

(II) Z treści zadania wynika, że zasady dla dnia następnego zależą tylko od sytuacji w dniu bieżącym. Zatem $P(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_{n+1}|A_n)$ oraz $P(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n^c) = P(A_{n+1}|A_n^c)$. Co więcej, $P(A_{n+1}|B_{n-1} \cap A_n) = P(A_{n+1}|A_n)$ i $P(A_{n+1}|B_{n-1} \cap A_n^c) = P(A_{n+1}|A_n^c)$ dla dowolnego zdarzenia B_{n-1}, które powstaje z $A_1, \ldots, A_{n-1}$ przez przekroje, sumy, dopełnienia.

Ad (a) Mamy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w trzecim dniu umowy naczynia myje mąż, tzn. $p_3 = P(A_3) =?$
Pokazaliśmy w (I), że $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$ oraz $p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$
Zatem:
$p_2 = 1 - \frac{1}{2}p_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$p_3 = 1 - \frac{1}{2}p_2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego, że w trzecim dniu umowy naczynia myje mąż, wynosi $\frac{5}{8}$.

Ad (b) Chcemy policzyć prawdopodobieństwo tego, że w trzech pierwszych dniach umowy naczynia mył mąż, o ile wiadomo, że mył on naczynia w dniu czwartym, czyli $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3|A_4)$.

Ze wzoru Bayesa i (II)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3|A_4) = \frac{P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_4)} = \frac{P(A_4|A_3)P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_4)}$$

Mamy z (I):
$P(A_4) = p_4 = 1 - \frac{1}{2}p_3 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{16}$,
$P(A_4|A_3) = \frac{1}{2}$,
a z definicji prawdopodobieństwa warunkowego, (I) i (II) otrzymujemy
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2) = P(A_3|A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) = (\frac{1}{2})^3$

Stąd :
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3|A_4) = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3}{\frac{11}{16}} = \frac{1}{11}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego, że w trzech pierwszych dniach umowy naczynia mył mąż, o ile wiadomo, że mył on naczynia w dniu czwartym, wynosi $\frac{1}{11}$.

Ad (c) Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym tygodniu umowy mąż i żona myli naczynia na przemian, czyli:
$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5 \cap A_6^c \cap A_7) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c \cap A_6 \cap A_7^c)$.

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego, (I) i (II) otrzymujemy
$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5 \cap A_6^c \cap A_7) = P(A_7|A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_6^c) \cdot P(A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_6^c) =$
$= P(A_7|A_6^c) \cdot P(A_6^c|A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5) \cdot P(A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_5) =$
$= 1 \cdot P(A_6^c|A_5) \cdot P(A_5|A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_4^c) =$
$= \frac{1}{2} \cdot P(A_5|A_4^c) \cdot P(A_4^c|A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cdot P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot P(A_4^c|A_3) \cdot P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2^c) \cdot P(A_1 \cap A_2^c) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot P(A_3|A_2^c) \cdot P(A_1 \cap A_2^c) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot P(A_2^c|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4$
Analogicznie otrzymamy:
$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c \cap A_6 \cap A_7^c) =$
$= P(A_7^c|A_6) \cdot P(A_6|A_5^c) \cdot P(A_5^c|A_4) \cdot P(A_4|A_3^c) \cdot P(A_3^c|A_2) \cdot P(A_2|A_1^c) \cdot P(A_1^c) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4$

Zatem
$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5 \cap A_6^c \cap A_7) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c \cap A_6 \cap A_7^c) = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{8}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym tygodniu umowy mąż i żona myli naczynia na przemian, wynosi $\frac{1}{8}$.

Ad (d) Z (I) ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia równanie rekurencyjne $p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot p_n$.
Równoważnie :
$p_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot p_n$
$p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot p_n$
$p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{2}{3}\right)$.

Inaczej mówiąc, $(p_n - \frac{2}{3})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $-\frac{1}{2}$. Każdy ciąg geometryczny o ilorazie q, gdzie $|q| < 1$, jest zbieżny do zera. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = 0$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$