Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 1. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo klasyczne. Prawdopodobieństwo geometryczne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **1.1**

(a) Uzasadnij własności prawdopodobieństwa podane na wykładzie.

(b) Uzasadnij podaną na wykładzie konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o skończonej liczbie stanów.

(c) Uzasadnij podaną na wykładzie konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o nieskończonej przeliczalnej liczbie stanów.

(d) Wykaż, że jeżeli w przestrzeni probabilistycznej wszystkie stany mają takie samo prawdopodobieństwo dodatnie, to zbiór zdarzeń elementarnych jest skończony.

(e) Wykaż, że jeżeli w przestrzeni probabilistycznej wszystkie stany mają prawdopodobieństwo równe zero, to zbiór zdarzeń elementarnych nie jest przeliczalny.

Zadanie **1.2**

(a) Siedem opon samochodowych zostało ponumerowanych liczbami od 1 do 7 w zależności od ich jakości od najlepszej do najgorszej. Klient wybrał losowo cztery opony. Wyznacz prawdopodobieństwo, że najlepsza opona jaką wybrał klient ma jakość 3. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(b) Hasło potrzebne do uzyskania połączenia w sieci komputerowej składa się z dwóch cyfr i następnie czterech dużych liter alfabetu angielskiego. Znajdź prawdopodobieństwo, że osoba postronna odgadnie hasło, jeśli wiadomo, że pierwsza cyfra jest nieparzysta, a wśród liter są dokładnie dwie litery A. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(c) Użytkownik karty kredytowej używa czterocyfrowego hasła dostępu. Złodziej posiada program, który sprawdza jeden układ cyfr w ciągu 1 sekundy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej karty w czasie nie dłuższym niż 10 sekund dostanie się na nasze konto kompletnie nie znając hasła? W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(d) Pudełko zawiera 90 śrub dobrych i 10 wadliwych. Z pudełka wyjęto 10 śrub. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie one są dobre? W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

Zadanie **1.3**

(a) Losujemy liczbę naturalną, tak że szansa na wylosowanie liczby i wynosi $3 \cdot 4^{-i}$. Określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 5 i przez 7.

(b) Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie na stronę ORZEŁ. Określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację dla monety symetrycznej. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy mniej niż 6 i więcej niż 3 rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy parzystą liczbę rzutów.

(c) Niech $\Omega = \{\omega_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Weźmy ciąg $p_n = c3^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Dobierz stałą c tak, aby ciąg (p_n) określał prawdopodobieństwo P na $(\Omega, 2^\Omega)$ tak, że $p_n = P(\{\omega_n\})$. Oblicz $P(\{\omega_3, \ldots, \omega_9\})$ oraz $P(\{\omega_4, \omega_8, \omega_{12}, \ldots\})$.

Zadanie **1.4**

(a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo punkt koła $x^2 + y^2 < 4$ leży na zewnątrz kwadratu $|x| < 1$, $|y| < 1$. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(b) Kawałek drutu długości 20 cm zgięto w przypadkowo wybranym punkcie pod kątem prostym, a następnie zgięto go w jeszcze dwóch miejscach tak, by powstała ramka prostokątna. Oblicz prawdopodobieństwo, że pole obszaru ograniczonego ramką nie przekracza 21 cm^2. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(c) Dwoje internautów umówiło się na spotkanie w sieci między godziną 17 a 18, przy czym będą na siebie czekać 6 minut i nie dłużej niż do godziny 18. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają? W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(d) Wybieramy losowo parę liczb (a, b) z prostokąta $[-2, 2] \times [-1, 1]$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwiastki równania $x^2 + 2ax + b = 0$ są rzeczywiste. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

Odpowiedzi i wskazówki:

Lista nr 1:

1.2 (a) $\Omega = \{\{op_1, op_2, op_3, op_4\}, \text{ gdzie } op_i \in \{1, 2, \ldots, 7\}\}$, nieuporządkowane czwórki bez powtórzeń ze zbioru siedmioelem.; $\frac{4}{35} \approx 0.114$; (b) $\frac{1}{187500} \approx 5.333 \cdot 10^{-6}$; (c) 0.001; (d) $\frac{520058680173}{1573664496040} \approx 0.33$

1.3 (a) $\frac{3}{4^{35}-1} \approx 2.541 \cdot 10^{-21}$;
(b) $\Omega = \{\omega_n = (n-1)$ razy RESZKA, na końcu ORZEŁ, $n = 1, 2, \ldots\}$,
$p_n = P(\{\omega_n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $P(\text{mniej niż 6 i więcej niż 3 rzuty}) = \frac{3}{2^5} = 0.09375$,
$P(\text{parzysta liczba rzutów}) = \frac{1}{3} \approx 0.3333$;
(c) $c = 2$, $P(\{\omega_3, \ldots, \omega_9\}) = \frac{3^7-1}{3^9} \approx 0.11106$, $P(\{\omega_4, \omega_8, \omega_{12}, \ldots\}) = \frac{2}{3^4-1} = \frac{1}{40} = 0.025$

1.4 (a) $1 - \frac{1}{\pi} \approx 0.6817$; (b) 0.6; (c) 0.19; (d) $\frac{5}{6} \approx 0.833$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz