Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 4. Zmienne losowe. Dystrybuanta.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **4.1**

(a) Gracz wyciąga z talii (52 kart) trzy karty (bez zwracania). Jeśli są to 3 asy, wygrywa 100 zł. Jeśli są wśród nich dokładnie 2 asy, gracz wygrywa 50 zł. Jeśli są to 3 figury, gracz wygrywa 10 zł, a w pozostałych przypadkach płaci 1 zł. Niech X oznacza wygraną gracza (przy czym przegrana 1 zł to inaczej wygrana -1 zł). Wyznacz i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X. Oblicz $P(X > 0)$.

(b) Na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = \{\omega = (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ z prawdopodobieństwem geometrycznym definiujemy zmienną losową R jako odległość punktu $(x, y) \in \Omega$ od środka koła $(0, 0)$, tzn. $R(\omega) = R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wyznacz i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej R. Oblicz $P(R < 0,5)$.

Zadanie **4.2**

(a) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ \frac{1}{3} & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}(x+1) & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Narysuj $F(x)$ i oblicz $P(0 < X < 1)$, $P(0 < X \leqslant 1)$, $P(0 \leqslant X < 1)$, $P(-1 < X < 2)$, $P(-1 \leqslant X < 2)$, $P(X > 0)$, $P(|X| > 0,5)$.

(b) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{0,75}{1+x^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

Narysuj $F(x)$ i oblicz $P(-1 < X < 0)$, $P(-1 < X \leqslant 0)$, $P(1 < X < 3)$, $P(|X| > 3)$, $P(|X - 1| < 1)$.

Zadanie **4.3**

(a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = A + B\text{arctg}(2x)$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Oblicz $P(X > 0,5)$.

(b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ x + B & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant -0,5, \\ 1 & \text{dla} \quad x > -0,5 \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Oblicz $P(-0,75 < X < 0)$.

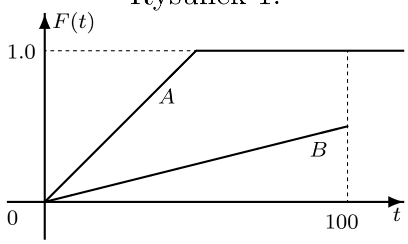
(c) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} A + 1 + e^x & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ e^{-1} & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 1, \\ B(3 - x^{-1}) & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Oblicz $P(-2 < X < 1/2)$ i $P(X > 2)$.

Zadanie **4.4**

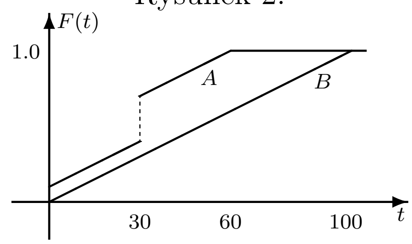
(a) Pewien informatyk oferuje w tej samej cenie dwa algorytmy A i B, generujące hasła dostępu. Zdolność pojedynczego algorytmu do ochrony dostępu określana jest poprzez rozkład zmiennej losowej T reprezentującej czas potrzebny na złamanie hasła. **Dystrybuanty** rozkładu zmiennej T odpowiednio dla algorytmów A i B przedstawione są na rysunku 1. Który algorytm byś wybrał? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Na rysunku 2 znajdują się **dystrybuanty** rozkładu opóźnienia w przesyłaniu plików dla dwóch programów ftp A i B. Dla którego małe opóźnienia są bardziej prawdopodobne? Dla którego jest bardziej prawdopodobne opóźnienie równe 30 jednostkom czasu? Dla którego jest bardziej prawdopodobne opóźnienie krótsze niż 15 jednostek czasu? Odpowiedzi uzasadnij.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Odpowiedzi i wskazówki:

4.1 (a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ \frac{5397}{5525} \approx 0,9768 & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 10, \\ \frac{5452}{5525} \approx 0,9868 & \text{dla} \quad 10 < x \leqslant 50, \\ \frac{5524}{5525} \approx 0,9998 & \text{dla} \quad 50 < x \leqslant 100, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 100 \end{cases}$ $\quad P(X > 0) = 1 - \frac{5397}{5525} \approx 0,0232;$

(b) $F(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad r \leqslant 0, \\ r^2 & \text{dla} \quad 0 < r \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad r > 1 \end{cases}$ $\quad P(R < 0,5) = 0,25$

4.2 (a) $P(0 \leqslant X < 1) = \frac{1}{3} \approx 0,3333$, $P(0 < X \leqslant 1) = \frac{2}{3} \approx 0,6667$, $P(-1 < X < 2) = \frac{2}{3} \approx 0,6667$, $P(-1 \leqslant X < 2) = 1$, $P(X > 0) = \frac{2}{3} \approx 0,6667$, $P(|X| > 1/2) = \frac{5}{6} \approx 0,8333$;
(b) $P(-1 < X < 0) = 0$, $P(-1 < X \leqslant 0) = 0,25$, $P(1 < X < 3) = 0,3$, $P(|X| > 3) = 0,075$, $P(|X - 1| < 1) = 0,6$

4.3 (a) $A = 0,5$; $B = \frac{1}{\pi}$, $P(X > 0,5) = 0,25$;
(b) $A = 0$, $1 \leqslant B \leqslant 1,5$, $P(-0,75 < X < 0) = 1,75 - B$;
(c) $A = -1$, $B = \frac{1}{3}$, $P(-2 < X < 1/2) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0,2325$, $P(X > 2) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$

4.4 (a) Algorytm B chroni lepiej. (b) Małe opóźnienia są bardziej prawdopodobne dla A. Opóźnienie równe 30 jednostkom czasu ma prawdopod. 0 dla B, a prawdop.>0 dla A. Opóźnienie krótsze niż 15 jednostek czasu jest bardziej prawdopodobne dla A.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz