Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Zmienne losowe. Rozkłady dyskretne i ciągłe.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **5.1**

(a) Niech X oznacza wynik rozmowy kwalifikacyjnej w skali -1 (kandydat odrzucony), 0 (kandydat do powtórnej rozmowy), 1 (kandydat przyjęty) z losowo wybranym kandydatem z dużej grupy chętnych. Rozkład tej zmiennej losowej podany jest w tabeli:

n	1	2	3
x_n	-1	0	1
p_n	$2C$	C	0,1

Wyznacz stałą C i oblicz prawdopodobieństwo, że kandydat nie zostanie od razu odrzucony.

(b) Niech $x_n = a + \frac{1}{n}$ oraz $p_n = b\frac{n}{(n+1)!}$. Wyznacz dla jakich wartości stałych $a \in \mathbb{N}$ i b ciąg $\{(x_n, p_n), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ określa rozkład pewnej dyskretnej zmiennej losowej. Następnie dla parametrów z wyznaczonego zakresu oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna ta jest większa od 6,3 i mniejsza od 7,25.

(c) W pewnej grze wygrana X wynosi n zł z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do $\frac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 5 zł.

Zadanie **5.2**

(a) Dla jakich wartości parametru p można dobrać stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \frac{c}{x^p} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ była gęstością pewnego rozkładu probabilistycznego? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Czy można dobrać stałe a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [a,b], \\ \frac{1}{|x|} & \text{dla } x \in [a,b] \end{cases}$ była gęstością pewnego rozkładu probabilistycznego? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **5.3**

(a) Funkcja $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wylicz $P(0,5 \leqslant X < 1,5)$ i $P(X \geqslant 2,5)$.

(b) Dobierz stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geqslant 1, \\ c(x^2 - 5) & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wylicz $P(0,5 \leqslant X < 1,5)$ i $P(X \geqslant -0,5)$.

(c) Dobierz stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} cx & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej i na tej podstawie wylicz $P(0,5 \leqslant X < 1,5)$ i $P(X \geqslant 0,75)$.

Zadanie **5.4**

(a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant -1/2, \\ A + B \arcsin(x) & \text{dla} \quad -1/2 < x \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{dla} \quad 1/2 < x \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

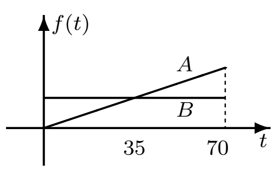
(b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ A - \frac{B}{1+x^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

Zadanie **5.5**

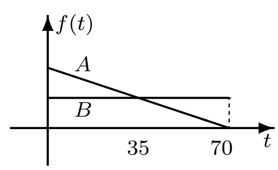
(a) Pewien informatyk oferuje w tej samej cenie dwa algorytmy A i B, generujące hasła dostępu. Zdolność pojedynczego algorytmu do ochrony dostępu określana jest poprzez rozkład zmiennej losowej T reprezentującej czas potrzebny na złamanie hasła. **Gęstości** rozkładu zmiennej T odpowiednio dla algorytmów A i B przedstawione są na rysunku 1. Który algorytm byś wybrał? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Na rysunku 2 znajdują się **gęstości** rozkładu opóźnienia w przesyłaniu plików dla dwóch programów ftp A i B. Dla którego programu małe opóźnienia są bardziej prawdopodobne? Dla którego jest bardziej prawdopodobne opóźnienie równe 30 jednostkom czasu? Dla którego jest bardziej prawdopodobne opóźnienie krótsze niż 15 jednostek czasu? Odpowiedzi uzasadnij.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Odpowiedzi i wskazówki:

5.1 (a) $C = 0,3$; $P(X \neq -1) = 0,4$; (b) a-dowolne, $b = 1$; dla $a = 6$ $P(6,3 < X < 7,25) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{23}{24} \approx 0,9583$, dla $a = 7$ $P(6,3 < X < 7,25) = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = \frac{1}{120} \approx 0,0083$, a dla innych a prawd. to wynosi 0; (c) $x_n = n$, $p_n = \frac{c}{n!}$ z $c = e^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$; $P(X \geqslant 5) = 1 - \frac{65}{24e} \approx 0,0037$;

5.2 (a) dla $p > 1$, wtedy $c = p - 1$; (b) tak, $a > 0$ i $b = e \cdot a$ albo $a < 0$ i $b = e^{-1} \cdot a$.

5.3 (a) $P(0,5 \leqslant X < 1,5) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{arctg}(1,5) - \mathrm{arctg}(0,5)) \approx 0,162$

$P(X \geqslant 2,5) = 1 - (\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(2,5) + \frac{1}{2}) \approx 0,12$;

(b) $c = -\frac{3}{28}$, $P(0,5 \leqslant X < 1,5) = \frac{53}{224} \approx 0,2366$, $P(X \geqslant -0,5) = \frac{171}{224} \approx 0,7634$;

(c) $c = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 2x - 1 - \frac{x^2}{2} & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla} \quad 2 < x, \end{cases}$

$P(0,5 \leqslant X < 1,5) = 0,75$, $P(X \geqslant 0,75) = \frac{23}{32} = 0,71875$;

5.4 (a) $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{\pi}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{dla} \quad -1/2 < x < 1/2, \\ 0 & \text{poza tym}, \end{cases}$

(b) $A = B = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

5.5 (a) Algorytm A zapewnia lepszą ochronę. Jednak po chwili 35 prawdopodobieństwo złamania hasła w czasie Δt jest niższe w przypadku algorytmu B.
(b) Małe opóźnienia są bardziej prawdopodobne dla A. Opóźnienie równe 30 jednostkom czasu ma prawdopod. 0 dla obu algorytmów. Opóźnienie krótsze niż 15 jednostek czasu jest bardziej prawdopodobne dla A.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz