Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 6. Wartość oczekiwana, wariancja, mediana, kwartyle rozkładu prawdopodobieństwa. Transformacje zmiennej losowej.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **6.1**
Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle dyskretnego rozkładu zmiennej losowej X,

(a) podanego w tabeli

n	1	2	3
x_n	-1	0	1
p_n	$0,6$	$0,3$	0,1

.

(b) zadanego ciągiem $\{(x_n, p_n), n = 1, 2, \ldots\}$, gdzie $x_n = \dfrac{1}{n}$, $p_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(c) gdzie X to losowa wygrana, która wynosi n zł z prawdopodobieństwem $\dfrac{e^{-1}}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (patrz też zadanie 5.1 (c)). Czy zagrałbyś w tę grę? Odpowiedź uzasadnij.

(d) gdzie X to losowa wygrana w grze, w której gracz wyciąga z talii (52 kart) trzy karty (bez zwracania) i jeśli są to 3 asy, wygrywa 100 zł. Jeśli są wśród nich dokładnie 2 asy, gracz wygrywa 50 zł. Jeśli są to 3 figury, gracz wygrywa 10 zł, a w pozostałych przypadkach płaci 1 zł (patrz zadanie 4.1 (a)). Czy zagrałbyś w tę grę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **6.2**
Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle ciągłego rozkładu zmiennej losowej X

(a) o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ |x| \geqslant 1, \\ -\frac{3}{28}(x^2-5) & \text{dla } \ |x| < 1. \end{cases}$.

(b) o gęstości $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{dla } \ 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$

(c) o gęstosci $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(d) o gęstości $f(x) = \begin{cases} (3/\pi)/\sqrt{1-x^2} & \text{dla } \ -1/2 < x < 1/2, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

(e) o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ x \leqslant 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{dla } \ x > 0. \end{cases}$

(f) o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{dla } \ 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla } \ x > 1 \end{cases}$

Zadanie **6.3**

(a) Liczba cząstek wpadających do pewnego licznika to zmienna losowa X o rozkładzie Poissona $\mathcal{P}(2)$. Definiujemy nową zmienną losową Y:

$$Y = \begin{cases} X, & \text{gdy } X < 10, \\ 10, & \text{gdy } X \geqslant 10. \end{cases}$$

Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y.

(b) Załóżmy, że napięcie $U = U_{\max} \sin\phi$ prądu zmiennego ma losową fazę ϕ o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i amplitudę $U_{\max} = 1$. Znajdź rozkład losowego napięcia U.

(c) Bok sześcianu B ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(2,9; 3,1)$ cm. Sześcian wykonano z żelaza o gęstości 7,88 $\mathrm{g/cm^3}$. Wyznacz rozkład masy M tego sześcianu.

(d) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(2)$.
Znajdź rozkład zmiennej losowej $Y = 1 - e^{-2X}$.

(e) Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,2)$. Znajdź rozkłady zmiennych losowych $Y = \sqrt{|X|}$ i $Z = X^2$.

Zadanie **6.4**

(a) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję napięcia $U = U_{\max} \sin\phi$ prądu zmiennego, które ma losową fazę ϕ o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i amplitudę $U_{\max} = 1$. Wykorzystaj przy tym rozkład losowej fazy ϕ.

(b) Bok sześcianu B ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(2,9; 3,1)$ cm. Sześcian wykonano z żelaza o gęstości 7,88 $\mathrm{g/cm^3}$. Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję losowej masy M tego sześcianu, wykorzystując rozkład losowego boku B.

(c) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Y = 1 - e^{-2X}$, gdzie X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(2)$. Wykorzystaj przy tym rozkład zmiennej losowej X.

Zadanie **6.5**

(a) Udowodnij nierówność Markowa, podaną na wykładzie.

(b) Prawdopodobieństwo wyprodukowania wybrakowanego wiertła wynosi 0.01. Stosując nierówność Markowa oszacuj po ile wierteł należy pakować do pudełek, aby prawdopodobieństwo, że pudełko zawiera co najmniej 50 sztuk dobrych, było nie mniejsze niż 0.95.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Odpowiedzi i wskazówki:

6.1 (a) $\mathrm{E}X = -0,5$, $\mathrm{D}^2X = 0,45$, $x_{0,5} = -1$, $x_{0,25} = -1$, $x_{0,75} = 0$;
(b) zastosuj np. Wolfram; $\mathrm{E}X = e-2 \approx 0,7183$, $\mathrm{D}^2X = Ei(1)+2-e-\gamma-(e-2)^2 \approx 0,0836915$, gdzie $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{t}$, $\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx \approx 0.5772$ - stała Eulera-Mascheroniego, $x_{0,5}$ - dowolna liczba z przedziału $[0.5, 1)$, $x_{0,25} = 0,5$, $x_{0,75} = 1$;
(c) $\mathrm{E}X = 1$, $\mathrm{D}^2X = 1$, $x_{0,5} = 1$, $x_{0,25} = 0$, $x_{0,75} = 2$;
(d) $\mathrm{E}X = -\frac{1147}{5525} \approx -0,21$ zł, $\mathrm{D}^2X = \frac{1108640316}{(5525)^2} \approx 36,32$, $x_{0,5} = -1$, $x_{0,25} = -1$, $x_{0,75} = -1$.

6.2 (a) $\mathrm{E}X = 0$, $\mathrm{D}^2X = \frac{11}{35} \approx 0,3143$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,25} \approx -0,46875$ (jest to rozwiązanie równania $x^3 - 15x - 7 = 0$ należące do przedziału $(-1, 1)$), $x_{0,75} = -x_{0,25} \approx 0,46875$ (jest to rozwiązanie równania $x^3 - 15x + 7 = 0$ należące do przedziału $(-1, 1)$);
(b) $\mathrm{E}X = 1$, $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{6}$, $x_{0,5} = 1$, $x_{0,25} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$, $x_{0,75} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,2929$;
(c) $\mathrm{E}X$ nie istnieje, D^2X nie jest zdefiniowana, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,25} = -1$, $x_{0,75} = 1$;
(d) $\mathrm{E}X = 0$, $\mathrm{D}^2X = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,0865$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,25} = -\sin\frac{\pi}{12} \approx -0,2588$, $x_{0,75} = \sin\frac{\pi}{12} \approx 0,2588$;
(e) $\mathrm{E}X = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708$, $\mathrm{D}^2X = \infty$, $x_{0,5} = 1$, $x_{0,25} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5773$, $x_{0,75} = \sqrt{3} \approx 1,7320$;
(f) $\mathrm{E}R = \frac{2}{3}$, $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{18}$, $x_{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$, $x_{0,25} = \frac{1}{2}$, $x_{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$.

6.3 (a)

$y_k = k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	$\frac{4}{3}e^{-2}$	$\frac{2}{3}e^{-2}$	$\frac{4}{15}e^{-2}$	$\frac{4}{45}e^{-2}$	$\frac{8}{315}e^{-2}$	$\frac{2}{315}e^{-2}$	$\frac{4}{2835}e^{-2}$	$1 - \frac{20947}{2835}e^{-2}$
$\approx$	0,1354	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,012	0,0034	0,0009	0,0002	0,0001

(wartości p_k w przybliżeniu na podstawie tablic rozkładu Poissona);
(b) U ma rozkład o gęstości $f_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } u \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}}, & \text{gdy } u \in (-1, 1); \end{cases}$
(c) M ma rozkład o gęstości $f_M(m) = \begin{cases} \frac{5 \cdot (7,88)^{-1/3}}{3} m^{-2/3}, & \text{gdy } m \in [193,18532; 234,75308], \\ 0, & \text{poza tym}, \end{cases}$
(d) Y ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, 1)$;
(e) Y ma rozkład o gęstości $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0, \\ \frac{4}{\sqrt{8\pi}} y e^{-\frac{y^4}{8}}, & \text{gdy } y > 0, \end{cases}$ Z ma rozkład gamma $\mathcal{G}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

6.4 (a) $\mathrm{E}U = 0$, $\mathrm{D}^2U = \frac{1}{2}$; (b) $\mathrm{E}M = \frac{7,88 \cdot 5(3,1^4 - 2,9^4)}{4} \approx 213$ g, $\mathrm{D}^2M = \frac{7,88^2 \cdot 5(3,1^7 - 2,9^7)}{7} - (\mathrm{E}M)^2 \approx 151$ g^2;
(c) $\mathrm{E}Y = \frac{1}{2}$, $\mathrm{D}^2Y = \frac{1}{12}$.

6.5 (b) Dla 63 wierteł warunki są spełnione.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz