

Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Twierdzenie Poissona. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a. Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Lévy'ego.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie 8.1

- Prawdopodobieństwo, że dowolna osoba odpowie na przesłaną pocztą reklamę i zamówi towar, wynosi 0,03. Reklamę wysłano do 200 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że (1) dokładnie 5 osób, (2) mniej niż 5 osób przyśle zamówienia. Obliczenia wykonać metodą dokładną oraz przybliżoną z tw. Poissona. Porównać wyniki.
- Przy badaniach na nosicielstwo pewnego wirusa prawdopodobieństwo natrafienia na nosiciela wynosi 0,005. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 1000 badanych będzie mniej niż 4 nosicieli. Oszacować błąd przybliżenia.
- Licznik Geigera-Millera i źródło promieniowania umieszczono względem siebie tak, że szansa zarejestrowania cząstki wynosi 0,001. W czasie obserwacji ciało radioaktywne wypromieniowało 2000 cząstek. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo zarejestrowania przez licznik (1) braku cząstek; (2) mniej niż 4 cząstek; (3) więcej niż 2 cząstek. Oszacować błąd przybliżenia.
- Książkę wydano w nakładzie 5000 egzemplarzy. Szansa na to, że egzemplarz zostanie źle oprawiony jest równa 0,001. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo tego, że w nakładzie pojawiają się co najmniej 3 wybrakowane oprawy.

Zadanie 8.2

- W pewnym dużym okręgu wyborczym ma zostać przeprowadzone referendum w sprawie budowy elektrowni atomowej. Wśród uprawnionych do głosowania mieszkańców 45% popiera tę inwestycję, a 55% jest przeciw. Na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia projektu w referendum, w których weźmie udział tylko 200 osób wybranych losowo. Oszacować błąd przybliżenia.
- Jeśli gracz wyrzuci kostką 6 oczek, to wygrywa 4 zł. Jeśli nie, przegrywa 1 zł. Oszacować prawdopodobieństwo tego, że w 1000 rzutach gracz przegra co najwyżej 20 zł. Oszacować błąd przybliżenia.
- W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 100000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczną składkę 50 zł za samochód. Średnio 9 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 5000 zł. Na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku towarzystwo nie poniesie strat. Oszacować błąd przybliżenia.
- Prawdopodobieństwo, że dowolna osoba odpowie na przesłaną pocztą reklamę i zamówi towar, wynosi 0,03. Reklamę wysłano do 200 osób. Na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że (1) dokładnie 5 osób, (2) mniej niż 5 osób przyśle zamówienia. Oszacować błąd przybliżenia. Porównać wyniki z otrzymanymi w zadaniu 8.1(a) metodą dokładną i przybliżoną z tw. Poissona.

Zadanie **8.3**

- (a) Czas oczekiwania na tramwaj linii 14 jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 20 minut. Pan Piotr codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy’ego prawdopodobieństwo, że pan Piotr traci w ciągu 160 kolejnych dni roboczych na czekanie na tramwaj linii 14 więcej niż 2500 minut.
- (b) Czas pracy lampy pewnego typu ma rozkład wykładniczy o średniej 100 dni. Na podstawie tw. Lindeberga–Lévy’ego oszacować, czy wystarczy mieć w zapasie 169 lamp, aby z prawdopodobieństwem 0,9 wystarczyło ich na 15000 dni nieprzerwanej pracy. (Przyjmujemy, że spalona lampa jest natychmiast wymieniana na nową.)
- (c) Pewna konstrukcja składa się ze 500 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga–Lévy’ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 1755 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwaną 3,5 kg i odchylenie standardowe 0,5 kg?
- (d) Samolot zabiera na pokład 70 osób. Waga pasażerów ma pewien rozkład o wartości oczekiwanej 75 kg i wariancji 25 kg^2 . Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy’ego prawdopodobieństwo, że łączna waga pasażerów przekroczy 5300 kg.
- (e) W grupie studenckiej przeprowadza się test, w którym można uzyskać do 100 punktów. Średni wynik uzyskiwany przez studenta wynosi 40 pkt, a wariancja 20^2 . Wyniki studentów są niezależne i o takim samym rozkładzie. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy’ego prawdopodobieństwo tego, że przeciętna liczba punktów przypadająca na jednego studenta w grupie 150 osób zawiera się w przedziale od 35 do 45 pkt.

Odpowiedzi i wskazówki:

8.1 (a)

	wzory dokładne	z tw. Poissona
(1)	0,1622	0,1606
(2)	0,2810	0,2851

; (b) 0,2650; błąd przybl. nie przekracza 0,025;

- (c) (1) 0,1353; (2) 0,8571; (3) 0,3233; błąd przybl. nie przekracza 0,002;
 (d) 0,8754; błąd przybl. nie przekracza 0,005.

8.2 (a) $0,9319 \pm 0,06$; (b) $0,0071 \pm 0,05$; (c) $0,9996 \pm 0,03$; (d) (1) $0,1492 \pm 0,64$; (2) $0,2676 \pm 0,32$;

8.3 (a) $\approx 0,9972$; (b) tak; (c) $\approx 0,4247$; (d) $\approx 0,1170$; (e) $\approx 0,9978$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz