

# Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

## Lista 9. Warunkowa wartość oczekiwana. Rozkłady warunkowe. Rozkłady stabilne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **9.1** Niech  $E|X| < \infty$  oraz  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ . Pokaż, że

- (a)  $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$ ;
- (b)  $E(aX+bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$  p.n., gdzie  $a, b$  są dowolnymi stałymi.
- (c) jeżeli  $X$  jest  $\mathcal{G}$ -mierzalna, to  $E(X|\mathcal{G}) = X$  p.n.;
- (d) jeżeli  $X$  jest niezależna od  $\mathcal{G}$ , to  $E(X|\mathcal{G}) = EX$  p.n.
- (e) dla  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  mamy  $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$  p.n.

Zadanie **9.2** Wyznacz rozkłady warunkowe  $X$  pod warunkiem  $Y$  oraz  $Y$  pod warunkiem  $X$  oraz odpowiadające im warunkowe wartości oczekiwane dla wektora losowego  $(X, Y)$  o podanym rozkładzie.

	$x_n$	0	1
$y_k$			
(a)	-1	0, 15	0, 25
	0	0	0, 25
	1	0, 15	0, 2

- (b) rozkład o gęstości  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x+2) & \text{dla } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$
- (c) rozkład o gęstości  $f(x, y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Zadanie **9.3** Niech  $(X, Y)$  ma rozkład o gęstości  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{2} & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Wyznacz  $E(X|Y)$ ,  $E(X+XY|X)$ ,  $E(X+XY|X=\pi/2)$ ,  $E(X^2+XY|X+Y)$ .

Zadanie **9.4**

- (a) Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie liczba podzielna przez 3. Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „2”. Opisać to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  (gdzie  $X$  to czas oczekiwania na liczbę podzielną przez 3). Znaleźć ich rozkład łączny, rozkład brzegowy  $X$  oraz rozkład warunkowy  $Y$  pod warunkiem  $X$ . Wyznaczyć  $EX$  oraz  $E(Y|X)$ , a na tej podstawie także  $EY$ .
- (b) Wiemy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej  $X$  pod warunkiem  $Y = y$  to rozkład Poissona z parametrem  $y$ , a  $Y$  ma rozkład gamma  $\mathcal{G}(2, 4)$ . Pokaż, że  $X$  ma rozkład ujemny dwumianowy. Wyznacz jego parametry.

Zadanie **9.5**

- (a) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe  $Y_1$  i  $Y_2$  są niezależne i mają taki sam rozkład stabilny  $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$  jak zmienna losowa  $Y$ , to dla dowolnych stałych  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \stackrel{d}{=} \lambda Y + \delta$$

dla pewnych stałych  $\lambda > 0, \delta$  (zależnych od  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ). Wyznacz postać stałych  $\lambda > 0, \delta$ .

- (b) Niech  $Z$  będzie zmienną losową o rozkładzie  $\mathcal{S}(\gamma, 1, 0, 1)$  dla pewnego  $0 < \gamma < 1$ , a  $Y$  - o rozkładzie standardowym normalnym, przy czym  $Z$  i  $Y$  są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X = Z^{1/2}Y$ .
- (c) Niech  $Z$  będzie zmienną losową o rozkładzie  $\mathcal{S}(\gamma, 1, 0, 1)$  dla pewnego  $0 < \gamma < 1$ , a  $Y$  - o rozkładzie  $\mathcal{S}(\alpha, 0, 0, 1)$  z  $0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1, \alpha \neq 1/\gamma$ , przy czym  $Z$  i  $Y$  są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X = Z^{1/\alpha}Y$ .
- (d) Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Pareto z parametrami  $0 < a < 2, A > 0$ . Wyznacz  $a_n, b_n$ , dla których  $\frac{X_1 + \dots + X_n - a_n}{b_n}$  ma niezdegenerowany rozkład graniczny przy  $n \rightarrow \infty$ . Podaj ten rozkład graniczny.

**Odpowiedzi i wskazówki:**

9.2 (a)

$x_n$	0	1
$P(X = x_n   Y = -1)$	3/8	5/8
$P(X = x_n   Y = 0)$	0	1
$P(X = x_n   Y = 1)$	3/7	4/7

;  $E(X|Y) = \frac{5}{8}\mathbb{1}_{-1}(Y) + \mathbb{1}_0(Y) + \frac{4}{7}\mathbb{1}_1(Y)$  p.n.,

$y_k$	-1	0	1
$P(Y = y_k   X = 0)$	1/2	0	1/2
$P(Y = y_k   X = 1)$	5/14	5/14	4/14

;  $E(Y|X) = -\frac{1}{14}\mathbb{1}_1(X)$  p.n.;

(b) zmienne losowe niezależne (patrz Zad. 7.2(a)), więc rozkłady warunkowe takie same jak brzegowe (patrz Zad. 7.2(a)), a warunkowe wartości oczekiwane są równe zwykłym wartościom oczekiwany, czyli  $E(X|Y) = EX = 16/27$  p.n.,  $E(Y|X) = EY = 0.8$  p.n.; (c) dla  $0 \leq y < 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases};$$

$$E(X|Y) = \frac{2,5-2Y}{4-3Y} \text{ p.n.}$$

$$\text{dla } 0 < x < 1 \quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{6y(2-x-y)}{4-3x} & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y \end{cases};$$

$$E(Y|X) = \frac{2,5-2X}{4-3X} \text{ p.n.}$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

$$9.3 \quad E(X|Y) = \frac{\cos Y + (\pi/2 - 1) \sin Y}{\cos Y + \sin Y} \text{ p.n.}; \quad E(X + XY|X) = X \left( 1 + \frac{\cos X + (\pi/2 - 1) \sin X}{\cos X + \sin X} \right) \text{ p.n.};$$

$$E(X + XY|X = \pi/2) = (\pi/2)^2; \quad E(X^2 + XY|X + Y) = \frac{1}{2}(X + Y)^2 \text{ p.n.}$$

9.4 (a)  $X$  - czas oczekiwania na pierwszą liczbę podzieloną przez 3,  
 $Y$  - ilość „2” wyrzuconych do chwili  $X$ .

$(X, Y)$  przyjmuje wartości  $(x_n, y_k) = (n, k)$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$  oraz  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ; z  
prawdop.

$$p_{nk} = P(X = n, Y = k) = \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \frac{1}{3}$$

$$P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad EX = 3$$

$$P(Y = k|X = n) = \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad E(Y|X) = \frac{1}{4}(X - 1)$$

$$EY = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{1}{4}(X - 1)\right) = \frac{1}{4}(EX - 1) = \frac{1}{2};$$

(b)  $\mathcal{NB}\left(4, \frac{2}{3}\right)$ .

$$9.5 \quad (a) \quad \lambda = (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \delta = \begin{cases} m(\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} c \beta ((\lambda_1 + \lambda_2) \ln(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2) & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases};$$

(b)  $X$  ma rozkład stabilny  $\mathcal{S}(2\gamma, 0, 0, 2^{-1/2} (\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(2\gamma)})$ ;

(c)  $X$  ma rozkład stabilny  $\mathcal{S}(\alpha\gamma, 0, 0, (\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(\alpha\gamma)})$ ;

$$(d) \quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1, \\ \frac{n}{A(a-1)}, & \text{gdy } 1 < a < 2, \\ \frac{n}{A} \int_0^\infty \frac{\cos(2x/\pi n)}{1+x} dx, & \text{gdy } a = 1, \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \left( \frac{\Gamma(2-a) \cos(\pi a/2)}{1-a} \right)^{1/a} A^{-1} n^{1/a}, & \text{gdy } a \neq 1, \\ (\pi/2) A^{-1} n, & \text{gdy } a = 1, \end{cases},$$

rozkład graniczny to  $\mathcal{S}(a, 1, 0, 1)$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz