

Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Rozwiązania zadań z listy 9. Warunkowa wartość oczekiwana. Rozkłady warunkowe. Rozkłady stabilne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **9.1** Niech $E|X| < \infty$ oraz σ -ciało $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Pokaż, że

(a) $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\Omega \in \mathcal{G}$ dla dowolnego σ -ciała \mathcal{G} , mamy z drugiego warunku na w.w.o. dla $G = \Omega$

$$E(E(X|\mathcal{G})) = \int_{\Omega} E(X|\mathcal{G}) dP = \int_{\Omega} X dP = EX.$$

(b) $E(aX+bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ p.n., gdzie a, b są dowolnymi stałymi.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ jest funkcją \mathcal{G} -mierzalną jako kombinacja liniowa takich funkcji. Ponadto

$$\begin{aligned} \int_G (aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})) dP &= a \int_G E(X|\mathcal{G}) dP + b \int_G E(Y|\mathcal{G}) dP = \\ &= a \int_G X dP + b \int_G Y dP = \int_G (aX + bY) dP. \end{aligned}$$

Zatem $aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej $aX + bY$ względem \mathcal{G} , więc $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ p.n.

(c) jeżeli X jest \mathcal{G} -mierzalna, to $E(X|\mathcal{G}) = X$ p.n.

Rozwiązanie:

X , która jest \mathcal{G} -mierzalna, spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej X względem \mathcal{G} .

(d) jeżeli X jest niezależna od \mathcal{G} , to $E(X|\mathcal{G}) = EX$ p.n.

Rozwiązanie:

Mamy pokazać, że funkcja stała równa EX spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej X względem \mathcal{G} . Dowolna funkcja stała jest \mathcal{G} -mierzalna, więc warunek pierwszy jest spełniony. Sprawdźmy warunek drugi. Dla dowolnego $G \in \mathcal{G}$ zmienna losowa X jest niezależna od $\mathbb{1}_G$,

gdzie $\mathbb{1}_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = a, \\ 0, & \text{gdy } x \neq a. \end{cases}$ Mamy więc

$$\int_G X dP = E(\mathbb{1}_G X) = E(\mathbb{1}_G) EX = \int_G (EX) dP.$$

Pokazaliśmy zatem, że $E(X|\mathcal{G}) = EX$ p.n.

(e) dla $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ mamy $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$ p.n.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $E(X|\mathcal{G})$ jest \mathcal{G}_1 -mierzalna, a ponieważ $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, również \mathcal{G} -mierzalna. Zatem z (c) $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$ p.n. Z drugiej strony, dla dowolnego $G \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ mamy

$$\int_G E(X|\mathcal{G}) dP = \int_G X dP = \int_G E(X|\mathcal{G}_1) dP$$

i stąd $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$ p.n.

Zadanie **9.2** Wyznacz rozkłady warunkowe X pod warunkiem Y oraz Y pod warunkiem X oraz odpowiadające im warunkowe wartości oczekiwane dla wektora losowego (X, Y) o podanym rozkładzie.

(a)

	x_n	0	1
	y_k		
-1		0,15	0,25
0		0	0,25
1		0,15	0,2

Rozwiązanie:

- Wyznaczamy rozkład warunkowy X względem Y :

$$P(X = 0|Y = -1) = \frac{P(X = 0, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,15}{0,4} = \frac{3}{8}$$

Podobnie wyliczamy pozostałe prawdopodobieństwa warunkowe, a wyniki umieszczamy w tabeli:

	x_n	0	1
$P(X = x_n Y = -1)$		3/8	5/8
$P(X = x_n Y = 0)$		0	1
$P(X = x_n Y = 1)$		3/7	4/7

Na podstawie tabeli otrzymujemy:

$$E(X|Y = -1) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

co można zapisać razem jako:

$$E(X|Y) = \frac{5}{8}\mathbb{1}_{-1}(Y) + \mathbb{1}_0(Y) + \frac{4}{7}\mathbb{1}_1(Y) \text{ p.n.}$$

- Wyznaczamy rozkład warunkowy Y względem X :

$$P(Y = -1|X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = -1)}{P(X = 0)} = \frac{0,15}{0,3} = \frac{1}{2}$$

Podobnie wyliczamy pozostałe prawdopodobieństwa warunkowe, a wyniki umieszczamy w tabeli:

	y_k	-1	0	1
$P(Y = y_k X = 0)$		1/2	0	1/2
$P(Y = y_k X = 1)$		5/14	5/14	4/14

Na podstawie tabeli otrzymujemy:

$$E(Y|X = 0) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$E(Y|X = 1) = -1 \cdot \frac{5}{14} + 0 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{4}{14} = -\frac{1}{14};$$

co można zapisać razem jako:

$$E(Y|X) = -\frac{1}{14}\mathbb{1}_1(X) \text{ p.n.};$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(b) rozkład o gęstości $f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x+2) & \text{dla } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Rozwiązanie:

- W zadaniu 7.2 wyliczyliśmy rozkłady brzegowe $f_X(x) = \begin{cases} (2/9)(5x+2) & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$
 $f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y; \end{cases}$ oraz stwierdziliśmy, że X i Y są niezależne;
- Zatem $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ oraz $E(X|Y) = EX = \frac{2}{9} \int_0^1 x(5x+2)dx = \frac{16}{27}$ p.n.
- Podobnie $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ oraz $E(Y|X) = EY = 4 \int_0^1 y \cdot y^3 dy = 0.8$ p.n.

(c) rozkład o gęstości $f(x, y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Rozwiązanie:

- Rola x i y w gęstości łącznej jest symetryczna, zatem wystarczy rozpatrywać tylko X pod warunkiem Y
- Wyznamy najpierw rozkład brzegowy:
 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} y(4-3y) & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y. \end{cases}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$ gdzie $0 < y < 1$.
- $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} dx = \frac{2,5-2y}{4-3y}$ dla $0 < y < 1$.
Zatem $E(X|Y) = \frac{2,5-2Y}{4-3Y}$ p.n.
- $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{6y(2-x-y)}{4-3x} & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y, \end{cases}$ gdzie $0 < x < 1$,
oraz $E(Y|X) = \frac{2,5-2X}{4-3X}$ p.n.

Zadanie **9.3** Niech (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{2} & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Wyznacz $E(X|Y)$, $E(X+XY|X)$, $E(X+XY|X=\pi/2)$, $E(X^2+XY|X+Y)$.

Rozwiązanie:

- Wyznamy najpierw rozkład brzegowy:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \frac{\cos y + \sin y}{2} & \text{dla } 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y. \end{cases}$$

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\cos y + \sin y} & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$ gdzie $0 \leq y \leq \pi/2$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^{\pi/2} x \frac{\sin(x+y)}{\cos y + \sin y} dx = \frac{\cos y + (\pi/2 - 1) \sin y}{\cos y + \sin y}$ dla $0 \leq y \leq \pi/2$.

Zatem $E(X|Y) = \frac{\cos Y + (\pi/2 - 1) \sin Y}{\cos Y + \sin Y}$ p.n.

- Z symetrycznej roli x i y we wzorze na gęstość można wywnioskować, że

$$E(Y|X) = \frac{\cos X + (\pi/2 - 1) \sin X}{\cos X + \sin X} \text{ p.n.}$$

- Z własności w.w.o. $E(X + XY|X) = E(X|X) + E(XY|X) = X + XE(Y|X)$. Zatem

$$E(X + XY|X) = X \left(1 + \frac{\cos X + (\pi/2 - 1) \sin X}{\cos X + \sin X} \right) \text{ p.n. oraz } E(X + XY|X = \pi/2) = (\pi/2)^2.$$

- Z symetrycznej roli x i y we wzorze na gęstość i w sumie $x + y$ można wywnioskować, że $E(X^2 + XY|X + Y) = E(Y^2 + XY|X + Y) = \frac{1}{2}(E(X^2 + XY|X + Y) + E(Y^2 + XY|X + Y)) = \frac{1}{2}E((X + Y)^2|X + Y) = \frac{1}{2}((X + Y)^2)$ p.n.^A

Zadanie 9.4

(a) Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie liczba podzielna przez 3. Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „2”. Opisać to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych X i Y (gdzie X to czas oczekiwania na liczbę podzielną przez 3). Znaleźć ich rozkład łączny, rozkład brzegowy X oraz rozkład warunkowy Y pod warunkiem X . Wyznaczyć EX oraz $E(Y|X)$, a na tej podstawie także EY .

Rozwiązanie:

- Rozkład łączny wyznaczyliśmy w zad.7.1(c). Niech X oznacza czas oczekiwania na pierwszą liczbę podzielną przez 3, a Y - ilość „2” wyrzuconych do chwili X . Wektor losowy (X, Y) przyjmuje wartości $(x_n, y_k) = (n, k)$, gdzie $n = 1, 2, \dots$ oraz $k = 0, 1, \dots, n - 1$; z prawdop. $p_{nk} = P(X = n, Y = k) = \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \frac{1}{3}$

- $P(X = n) = p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$,
czyli X ma rozkład geometryczny $\mathcal{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$, a w konsekwencji $EX = 3$.

- $P(Y = k|X = n) = \frac{p_{nk}}{p_n} = \frac{\binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-k}$
dla $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

czyli rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X = n$ to rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(n - 1, \frac{1}{4})$.

Zatem $E(Y|X = n) = \frac{1}{4}(n - 1)$, czyli $E(Y|X) = \frac{1}{4}(X - 1)$

- $EY = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{1}{4}(X - 1)\right) = \frac{1}{4}(EX - 1) = \frac{1}{4}(3 - 1) = \frac{1}{2}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

^AInny sposób wyliczenia: Z własności w.w.o. mamy $E(X^2 + XY|X + Y) = E((X + Y)X|X + Y) = (X + Y)E(X|X + Y)$ p.n. Wyznaczyć $E(X|X + Y)$ możemy podobnie jak $E(X^2 + XY|X + Y)$ albo możemy znaleźć gęstość rozkładu wektora losowego $(X, X + Y)$ i skorzystać z odpowiednich wzorów na gęstość warunkową i w.w.o. Mamy $(X, X + Y) = g(X, Y)$, $g^{-1}(x, z) = (x, z - x)$, jacobian tego przekształcenia równy jest 1 i stąd $(X, X + Y)$ ma rozkład o gęstości

$$\begin{aligned} f(x, z - x) &= \frac{\sin z}{2} \mathbb{1}_{[0, \pi/2]}(x) \mathbb{1}_{[x, \pi/2 - x]}(z) = \\ &= \frac{\sin z}{2} (\mathbb{1}_{[0, z]}(x) \mathbb{1}_{[0, \pi/2]}(z) + \mathbb{1}_{[z - \pi/2, \pi/2]}(x) \mathbb{1}_{[\pi/2, \pi]}(z)). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $E(X|X + Y) = \frac{X + Y}{2}$ p.n.

- (b) Wiemy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y$ to rozkład Poissona z parametrem y , a Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(2, 4)$. Pokaż, że X ma rozkład ujemny dwumianowy. Wyznacz jego parametry.

Rozwiązanie:

- Mamy $P(X = n|Y = y) = \frac{y^n}{n!}e^{-y}$ dla $n = 0, 1, \dots$, gdzie Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(2, 4)$,

$$\text{czyli rozkład ciągły o gęstości } f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leq 0, \\ (8/3)y^3e^{-2y}, & \text{gdy } y > 0; \end{cases}$$

$$(\Gamma(4) = 3! = 6).$$

- Zatem dla $n = 0, 1, \dots$ otrzymujemy

$$P(X = n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X = n|Y = y)f_Y(y)dy = \int_0^{\infty} \frac{y^n}{n!}e^{-y}(8/3)y^3e^{-2y}dy =$$

$$= \frac{8}{3n!} \int_0^{\infty} y^{(n+4)-1}e^{-3y}dy = \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 3n!} \frac{\Gamma(n+4)}{3^{n+4}} = \frac{((n+4)-1)!}{n!(4-1)!} \frac{16}{3^{n+4}} =$$

$$= \binom{(n+4)-1}{4-1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{(n+4)-4}.$$

$$\text{Widać stąd, że } P(X+4 = k) = \binom{k-1}{4-1} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-4} \text{ dla } k = 4, 5, \dots,$$

czyli $X+4$ ma rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}(4, 2/3)$.

Zadanie 9.5

- (a) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne i mają taki sam rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ jak zmienna losowa Y , to dla dowolnych stałych $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \stackrel{d}{=} \lambda Y + \delta$$

dla pewnych stałych $\lambda > 0, \delta$ (zależnych od λ_1 i λ_2). Wyznacz postać stałych $\lambda > 0, \delta$.

Rozwiązanie:

- Zmienne losowe Y_1, Y_2 i Y mają funkcję charakterystyczną postaci

$$\varphi_{\alpha, \beta, m, c}(t) = \exp\{imt - |ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\},$$

$$\text{gdzie } l(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ -\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

- Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej $\lambda Y + \delta$ ma postać $Ee^{it(\lambda Y + \delta)} = e^{i\delta t} \varphi_{\alpha, \beta, m, c}(\lambda t) = \exp\{i(\delta + m\lambda)t - |c\lambda t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda t))\}$
- Zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne, więc funkcja charakterystyczna sumy $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ ma postać $Ee^{it(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)} = \varphi_{\alpha, \beta, m, c}(\lambda_1 t) \varphi_{\alpha, \beta, m, c}(\lambda_2 t) = \exp\{im(\lambda_1 + \lambda_2)t - |c\lambda_1 t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda_1 t)) - |c\lambda_2 t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda_2 t))\}$.

- Zauważmy, że dla $\lambda > 0$ mamy $l(\lambda t) = \begin{cases} l(t) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ l(t) - \operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln \lambda & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ Stąd mamy } \mathbb{E}e^{it(\lambda Y + \delta)} &= \begin{cases} \exp\{i(\delta + m\lambda)t - |c\lambda t|^\alpha(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(\delta + m\lambda)t - |c\lambda t|(1 - i\beta l(t) + i\beta \operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi} \ln \lambda)\} & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \exp\{i(\delta + m\lambda)t - \lambda^\alpha |ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(\delta + m\lambda - \frac{2}{\pi}c\beta\lambda \ln \lambda)t - \lambda|ct|(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, $\mathbb{E}e^{it(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)} =$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \exp\{im(\lambda_1 + \lambda_2)t - (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)|ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{im(\lambda_1 + \lambda_2)t - |c(\lambda_1 + \lambda_2)t|(1 - i\beta l(t)) - i\beta|ct|\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}(\lambda_1 \ln \lambda_1 + \lambda_2 \ln \lambda_2)\} & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \exp\{im(\lambda_1 + \lambda_2)t - (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)|ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(m(\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{2}{\pi}c\beta(\lambda_1 \ln \lambda_1 + \lambda_2 \ln \lambda_2))t - (\lambda_1 + \lambda_2)|ct|(1 - i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Porównując, otrzymujemy, że $\mathbb{E}e^{it(\lambda Y + \delta)} = \mathbb{E}e^{it(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)}$

$$\text{dla } \lambda = (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}, \delta = \begin{cases} m(\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}c\beta((\lambda_1 + \lambda_2) \ln(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2) & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

- (b) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma, 1, 0, 1)$ dla pewnego $0 < \gamma < 1$, a Y - o rozkładzie standardowym normalnym, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X = Z^{1/2}Y$.

Rozwiązanie:

- Rozkład wyznaczmy posługując się funkcją charakterystyczną. Oznaczmy funkcję charakterystyczną Y przez $\varphi_Y(t)$, a transformatę Laplace'a Z przez $\psi_Z(t)$.
- Mamy $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{itZ^{1/2}Y} = \mathbb{E}\mathbb{E}(e^{itZ^{1/2}Y}|Z)$.
- Ponieważ Z i Y są niezależne, $\mathbb{E}(e^{itZ^{1/2}Y}|Z) = \mathbb{E}(e^{itz^{1/2}Y}|Z)|_{z=Z} = \mathbb{E}(e^{itz^{1/2}Y})|_{z=Z} = \varphi_Y(tz^{1/2})|_{z=Z} = \exp\left(-\frac{1}{2}(tz^{1/2})^2\right)|_{z=Z} = e^{-\frac{t^2}{2}Z}$
- Zatem $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{-\frac{t^2}{2}Z} = \psi_Z(t^2/2) = e^{-(t^2/2)^\gamma / \cos(\pi\gamma/2)} = e^{-|ct|^{2\gamma}}$ dla $c^{2\gamma} = 2^{-\gamma}(\cos(\pi\gamma/2))^{-1}$
- Wynika stąd, że X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(2\gamma, 0, 0, 2^{-1/2}(\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(2\gamma)})$.

- (c) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma, 1, 0, 1)$ dla pewnego $0 < \gamma < 1$, a Y - o rozkładzie $\mathcal{S}(\alpha, 0, 0, 1)$ z $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 1/\gamma$, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X = Z^{1/\alpha}Y$.

Rozwiązanie:

- Zastosujemy metodę z punktu (b). Oznaczmy funkcję charakterystyczną Y przez $\varphi_Y(t)$, a transformatę Laplace'a Z przez $\psi_Z(t)$.
- Mamy $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{itZ^{1/\alpha}Y} = \mathbb{E}\mathbb{E}(e^{itZ^{1/\alpha}Y}|Z)$.
- Ponieważ Z i Y są niezależne, $\mathbb{E}(e^{itZ^{1/\alpha}Y}|Z) = \mathbb{E}(e^{itz^{1/\alpha}Y}|Z)|_{z=Z} = \mathbb{E}(e^{itz^{1/\alpha}Y})|_{z=Z} = \varphi_Y(tz^{1/\alpha})|_{z=Z} = \exp\left(-|tz^{1/\alpha}|^\alpha\right)|_{z=Z} = e^{-|t|^\alpha Z}$
- Zatem $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{-|t|^\alpha Z} = \psi_Z(|t|^\alpha) = e^{-(|t|^\alpha)^\gamma / \cos(\pi\gamma/2)} = e^{-|ct|^{\alpha\gamma}}$ dla $c^{\alpha\gamma} = (\cos(\pi\gamma/2))^{-1}$
- Wynika stąd, że X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha\gamma, 0, 0, (\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(\alpha\gamma)})$.

- (d) Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Pareto z parametrami $0 < a < 2, A > 0$. Wyznacz a_n, b_n , dla których $\frac{X_1 + \dots + X_n - a_n}{b_n}$ ma niezdegenerowany rozkład graniczny przy $n \rightarrow \infty$. Podaj ten rozkład graniczny.

Rozwiązanie:

- X_i ma rozkład Pareto z parametrami $0 < a < 2, A > 0$, czyli rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{(1 + Ax)^a}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

- Rozkład ten należy do normalnego obszaru przyciągania rozkładu stabilnego $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z $\alpha = a$ i $\beta = 1$, ponieważ dla $c_0 = A^{-1}$ i $\alpha = a$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(-x) + 1 - F(x)}{(x/c_0)^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 + 1 - (1 - (1 + Ax)^{-a})}{(Ax)^{-a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{Ax} + 1 \right)^{-a} = 1$$

oraz dla $\beta = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{F(-x) + 1 - F(x)} = 1 = \frac{1 + \beta}{2}.$$

- Wówczas wiemy, że dla

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1, \\ nEX_i, & \text{gdy } 1 < a < 2, \\ n^2 \frac{\pi}{2A} E \sin\left(\frac{2AX_i}{\pi n}\right), & \text{gdy } a = 1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1, \\ \frac{n}{A(a-1)}, & \text{gdy } 1 < a < 2, \\ \frac{n}{A} \int_0^\infty \frac{\cos(2x/\pi n)}{1+x} dx, & \text{gdy } a = 1, \end{cases}$$

oraz

$$b_n = \begin{cases} \left(\frac{\Gamma(2-a) \cos(\pi a/2)}{1-a} \right)^{1/a} A^{-1} n^{1/a}, & \text{gdy } a \neq 1, \\ (\pi/2) A^{-1} n, & \text{gdy } a = 1, \end{cases}$$

mamy

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y,$$

gdzie Y ma rozkład $\mathcal{S}(a, 1, 0, 1)$ (czyli rozkład graniczny to $\mathcal{S}(a, 1, 0, 1)$).

- Obliczenia pomocnicze:

Rozkład Pareto jest ciągły o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ (1 - (1 + Ax)^{-a})' = aA(1 + Ax)^{-a-1}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$

Zatem dla $1 < a < 2$ mamy

$$EX_i = \int_0^\infty xaA(1+Ax)^{-a-1} dx = [y = 1 + Ax] = aA^{-1} \int_1^\infty (y-1)y^{-a-1} dy = aA^{-1} \left(\frac{y^{-a+1}}{-a+1} - \frac{y^{-a}}{-a} \right) \Big|_{y=1}^{y=\infty} =$$

$$= aA^{-1} \left(-\frac{1}{-a+1} + \frac{1}{-a} \right) = \frac{1}{A(a-1)}$$

Natomiast dla $a = 1$ otrzymujemy

$$E \sin\left(\frac{2AX_i}{\pi n}\right) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{2Ax}{\pi n}\right) A(1 + Ax)^{-2} dx = [Ax = y] = \int_0^\infty \sin\left(\frac{2y}{\pi n}\right) (-(1 + y)^{-1})' dy =$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi n} \int_0^\infty \cos\left(\frac{2y}{\pi n}\right) (1 + y)^{-1} dy.$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz