Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 1. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo klasyczne. Prawdopodobieństwo geometryczne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **1.1**

(a) Uzasadnij własności prawdopodobieństwa:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$

(2) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

(3) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych parami rozłącznych zdarzeń losowych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zachodzi $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(5) Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$

(6) Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ to nierosnący ciąg zdarzeń losowych , tzn. $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego n, to

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(7) Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ to niemalejący ciąg zdarzeń losowych , tzn. $A_n \subset A_{n+1}$ dla każdego n, to

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(8) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i stąd $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$

(9) Dla dowolnego ciagu zdarzeń losowych $A_1, A_2, \ldots$ zachodzi $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(b) Uzasadnij podaną konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o skończonej liczbie stanów:
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ - zbiór **skończony**,
$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω,
wybieramy liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ spełniające warunki $p_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,
definiujemy $P(\{\omega_i\}) := p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Z własności prawdopodobieństwa mamy wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ $P(A) = \sum\limits_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i$.

(c) Uzasadnij analogiczną konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o nieskończonej przeliczalnej liczbie stanów.

(d) Wykaż, że jeżeli w przestrzeni probabilistycznej wszystkie stany mają takie samo prawdopodobieństwo dodatnie, to zbiór zdarzeń elementarnych jest skończony.

(e) Wykaż, że jeżeli w przestrzeni probabilistycznej wszystkie stany mają prawdopodobieństwo równe zero, to zbiór zdarzeń elementarnych nie jest przeliczalny.

Zadanie **1.2**

(a) W pudełku znajdują się guziki jednakowego kształtu, sześć białych, osiem różowych, trzy fioletowe i trzy czarne. Wylosowano w sposób przypadkowy jednocześnie trzy z nich. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą tę sytuację. Wylicz prawdopodobieństwo, że wylosowano guziki tego samego koloru, oraz prawdopodobieństwo, że wylosowano co najmniej dwa guziki różowe.

(b) Hasło potrzebne do uzyskania połączenia w sieci komputerowej składa się z dwóch cyfr i następnie czterech dużych liter alfabetu angielskiego. Znajdź prawdopodobieństwo, że osoba postronna odgadnie hasło, jeśli wiadomo, że pierwsza cyfra jest nieparzysta, a wśród liter są dokładnie dwie litery A. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(c) Użytkownik karty kredytowej używa czterocyfrowego hasła dostępu. Złodziej posiada program, który sprawdza jeden układ cyfr w ciągu 1 sekundy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej karty w czasie nie dłuższym niż 10 sekund dostanie się na nasze konto kompletnie nie znając hasła? W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(d) Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry, zieloną i białą, i obserwujemy, jakie wypadły liczby oczek. Określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację. Wyznacz prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych liczb oczek jest liczbą parzystą, oraz prawdopodobieństwo, że na obu kostkach wypadła ta sama liczba oczek.

Zadanie **1.3**

(a) Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie na stronę ORZEŁ. Określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację dla monety symetrycznej. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy mniej niż 6 i więcej niż 3 rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy parzystą liczbę rzutów.

(b) Losujemy liczbę naturalną, tak że szansa na wylosowanie liczby n jest proporcjonalna do 0.25^n. Określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5.

Zadanie **1.4**

(a) Wybierasz losowo (bez wyróżniania jakiegokolwiek kawałka) punkt (x, y) z kwadratu $[0, 2] \times [0, 2]$. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą tę sytuację. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt leży poniżej krzywej $y = -\frac{8}{3}(x^2 - 2x)$, oraz prawdopodobieństwo, że pierwsza współrzędna wylosowanego punktu jest większa niż 1.5.

(b) Wybierasz losowo (bez wyróżniania jakiegokolwiek kawałka) punkt (a, b) z prostokąta $[-2, 2] \times [-1, 1]$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwiastki równania $x^2+2ax+b = 0$ są rzeczywiste. W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

(c) Dwoje internautów umówiło się na spotkanie w sieci między godziną 17 a 18, przy czym będą na siebie czekać 6 minut i nie dłużej niż do godziny 18. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają? W rozwiązaniu określ precyzyjnie przestrzeń probabilistyczną modelującą podaną sytuację.

Odpowiedzi i wskazówki:

1.2 (a) $P(\text{tego samego koloru}) = \frac{78}{1140} \approx 0.0684$, $P(\text{co najmniej 2 różowe}) = \frac{392}{1140} \approx 0.3439$;
(b) $\frac{1}{187500} \approx 5.333 \cdot 10^{-6}$; (c) 0.001;
(d) $P(\text{iloczyn parzysty}) = 0.75$, $P(\text{ta sama liczba oczek}) = \frac{1}{6} \approx 0.1667$

1.3 (a) $\Omega = \{\omega_n = (n-1) \text{ razy RESZKA, na końcu ORZEŁ}, n = 1, 2, \ldots\}$, $p_n = P(\{\omega_n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
$P(\text{mniej niż 6 i więcej niż 3 rzuty}) = \frac{3}{2^5} = 0.09375$, $P(\text{parzysta liczba rzutów}) = \frac{1}{3} \approx 0.3333$;
(b) $p_n = 3 \cdot 0.25^n$, $\frac{3}{1023} \approx 0.0029$

1.4 (a) $P(\text{punkt poniżej krzywej}) = \frac{7}{9} \approx 0.7778$, $P(\text{pierwsza współrz.} > 1.5) = 0.25$; (b) $\frac{5}{6} \approx 0.833$; (c) 0.19.