Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa. Niezależność zdarzeń.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **2.1**

(a) Uzasadnij, że $P_B(A) := P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ przy ustalonym B, takim że $P(B) > 0$, to nowe prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$, tzn. $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ jest nową przestrzenią probabilistyczną.

(b) Udowodnij twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayesa:
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym: Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω (tzn. rodziną zdarzeń losowych parami rozłącznych taką, że $\bigcup_{n \in \mathbb{T}} B_n = \Omega$) przy czym $P(B_n) > 0$ dla każdego n. Wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ mamy $P(A) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n)$.

Wzór Bayesa: Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ takich, że $P(A)P(B) > 0$ mamy $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

(c) Pokaż, że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \iff P(A_n) = 1$ dla każdego n.

(d) Udowodnij lemat Borela-Cantelliego:
Niech $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ będzie będzie ciągiem zdarzeń losowych w $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definiujemy $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$. Wtedy:

1. Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest zbieżny, to $P(A) = 0$.
2. Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest rozbieżny i zdarzenia $A_i, i \in \mathbb{N}$ są niezależne, to $P(A) = 1$.

Zadanie **2.2**

(a) (c.d. zadania 1.2 (d)) Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry, zieloną i białą, i obserwujemy, jakie wypadły liczby oczek. Niech A będzie zdarzeniem losowym, że iloczyn wylosowanych liczb oczek jest liczbą parzystą, a B - zdarzeniem losowym, że na obu kostkach wypadła ta sama liczba oczek. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe B pod warunkiem, że zaszło A.

(b) Wśród 100 mężczyzn jest 5 daltonistów, a wśród 1000 kobiet są 2 daltonistki. Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wybrano losowo osobę, która okazała się daltonistą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

(c) Pewna choroba jest obecna w 0.05% populacji. Opracowano test, który daje wynik dodatni u $a = 95\%$ chorych i u $b = 7\%$ zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem dodatnim jest chory? Czy ma on powody do obaw? Dla jakich wartości a i b pozytywny wynik testu w istotny, twoim zdaniem, sposób wskazywałby na obecność badanej choroby u pacjenta?

(d) W pewnym teleturnieju za jednymi z trzech zamkniętych drzwi znajduje się samochód, a za pozostałymi dwoma Zonki. Prowadzący grę wie, które drzwi kryją samochód. Gracz wskazuje na jedne z drzwi, prowadzący otwiera jedne z pozostałych odkrywając Zonka i następnie pyta gracza, które z zamkniętych drzwi otworzyć (tzn. czy gracz zmienia wybór, czy nie). Jeżeli gracz wskaże na odpowiednie drzwi, wygrywa samochód.

Powiedzmy, że gracz wskazał na początku na drzwi nr 2, a prowadzący grę otworzył drzwi nr 1 z Zonkiem. Czy graczowi opłaca się zmienić decyzję i wskazać na drzwi nr 3? Odpowiedź uzasadnij.

(e) Spośród trzech równorzędnych kandydatów należy wybrać przewodniczącego grupy. W tym celu na jednej z trzech czystych kartek piszemy słowo „przewodniczący” i wrzucamy je do pudełka. Następnie kandydaci kolejno losują jedną kartkę i ten, który wylosuje „przewodniczącego” zostaje wybrany. Który kandydat ma największe szanse: losujący jako pierwszy, drugi, czy trzeci?

(f) Pewna firma przewozowa używa niebieskich i zielonych samochodów, przy czym zielonych jest 3 razy więcej niż niebieskich. W nocy zdarzył się wypadek spowodowany przez samochód tej firmy, ale sprawca odjechał z miejsca wypadku. Świadek twierdzi, że samochód był zielony. Eksperymenty wykazały jednak, że świadek ten poprawnie rozpoznaje kolor auta w takich warunkach tylko w 80% przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadek spowodowany został rzeczywiście przez zielone auto?

Zadanie **2.3**

(a) (c.d. zadania 1.2 (a)) W pudełku znajdują się guziki jednakowego kształtu, sześć białych, osiem różowych, trzy fioletowe i trzy czarne. Wylosowano w sposób przypadkowy jednocześnie trzy z nich. Niech A oznacza zdarzenie losowe, że wylosowano guziki tego samego koloru, a B - zdarzenie losowe, że wylosowano co najmniej dwa guziki różowe. Sprawdź, czy A i B są niezależne.

(b) (c.d. zadania 1.4 (a)) Wybierasz losowo (bez wyróżniania jakiegokolwiek kawałka) punkt (x, y) z kwadratu $[0, 2] \times [0, 2]$. Niech A będzie zdarzeniem losowym, że wylosowany punkt leży poniżej krzywej $y = -\frac{8}{3}(x^2 - 2x)$, a B - zdarzeniem losowym, że pierwsza współrzędna wylosowanego punktu jest większa niż 1.5. Sprawdź, czy A i B są niezależne.

(c) Prawdopodobieństwo trafienia w ruchomy cel przy jednym strzale jest równe 2/3. Pięć osób strzela niezależnie do jednego ruchomego celu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony?

(d) Jest 10 kartek z pytaniami egzaminacyjnymi. Losuje się jedną z nich w sposób przypadkowy. Kartka nr k zawiera najtrudniejszy zestaw pytań. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żaden z pięciu zdających nie wylosuje kartki nr k, jeśli wylosowane już kartki

1. są odkładane;
2. nie są odkładane, tzn. mogą być ponownie wylosowane.

W którym z dwu rozważanych sposobów losowania zdarzenia polegające na wylosowaniu kartki nr k przez różne osoby zdające są niezależne?

(e) Korzystając z lematu Borela-Cantelliego oblicz prawdopodobieństwo, że przy nieograniczonym w czasie rzucaniu symetryczną kostką do gry wynik "6" pojawi się nieskończenie wiele razy.

Odpowiedzi i wskazówki:

2.2 (a) $\frac{1}{9} \approx 0.1111$; (b) $\frac{25}{26} \approx 0.9615$; (c) $\frac{0.95 \cdot 0.0005}{0.07044} \approx 0.00674$; (d) tak, patrz przykłady; (e) losujący mają taką samą szansę $\frac{1}{3}$; (f) $\frac{12}{13} \approx 0.9231$

2.3 (a) nie; (b) nie; (c) $\frac{242}{243} \approx 0.9959$; (d) 1. 0.5, 2. $(0.9)^5 \approx 0.59$; zdarzenia są niezależne w przypadku 2.; (e) 1.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz