

Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 4. Zmienne losowe. Dystrybuanta.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie 4.1

- (a) Gracz wyciąga z talii (52 kart) trzy karty (bez zwracania). Jeśli są to 3 asy, wygrywa 100 zł. Jeśli są wśród nich dokładnie 2 asy, gracz wygrywa 50 zł. Jeśli są to 3 figury, gracz wygrywa 10 zł, a w pozostałych przypadkach płaci 1 zł. Niech X oznacza wygraną gracza (przy czym przegrana 1 zł to inaczej wygrana -1 zł). Wyznacz i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X . Oblicz $P(X > 0)$.
- (b) Na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = \{\omega = (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ z prawdopodobieństwem geometrycznym definiujemy zmienną losową R jako odległość punktu $(x, y) \in \Omega$ od środka koła $(0, 0)$, tzn. $R(\omega) = R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wyznacz i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej R . Oblicz $P(R < 0.5)$.

Zadanie 4.2

- (a) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{3}(x+1) & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < x. \end{cases}$$

Narysuj $F(x)$ i oblicz $P(0 < X < 1)$, $P(0 < X \leq 1)$, $P(0 \leq X < 1)$, $P(-1 < X < 2)$, $P(-1 \leq X < 2)$, $P(X > 0)$, $P(|X| > 0.5)$.

- (b) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 - \frac{0.75}{1+x^2} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Narysuj $F(x)$ i oblicz $P(-1 < X < 0)$, $P(-1 < X \leq 0)$, $P(1 < X < 3)$, $P(|X| > 3)$, $P(|X - 1| < 1)$.

- (c) Czy poniższe zdanie jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.
Jeśli dystrybuanta zmiennej losowej X ma wartość 0.2 w punkcie -2 , to $P(X \leq -2)$ jest równe 0.2.
- (d) Czy poniższe zdanie jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.
Jeśli dystrybuanta zmiennej losowej X ma wartość 0.3 w punkcie 0, to $P(X > 0)$ jest mniejsze lub równe 0.7.

Zadanie **4.3**

- (a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = A + B \arctg(2x)$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X . Oblicz $P(X > 0.5)$.
- (b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla } x \leq -1, \\ x + B & \text{dla } -1 < x \leq -0.5, \\ 1 & \text{dla } x > -0.5 \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X . Oblicz $P(-0.75 < X < 0)$.

- (c) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} A + 1 + e^x & \text{dla } x \leq -1, \\ e^{-1} & \text{dla } -1 < x \leq 1, \\ B(3 - x^{-1}) & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X . Oblicz $P(-2 < X < 0.5)$ i $P(X > 2)$.

Odpowiedzi i wskazówki:

$$4.1 \text{ (a) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1, \\ \frac{5397}{5525} \approx 0.9768 & \text{dla } -1 < x \leq 10, \\ \frac{5452}{5525} \approx 0.9868 & \text{dla } 10 < x \leq 50, \\ \frac{5524}{5525} \approx 0.9998 & \text{dla } 50 < x \leq 100, \\ 1 & \text{dla } x > 100 \end{cases} \quad P(X > 0) = 1 - \frac{5397}{5525} \approx 0.0232;$$

$$(b) F(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leq 0, \\ r^2 & \text{dla } 0 < r \leq 1, \\ 1 & \text{dla } r > 1 \end{cases} \quad P(R < 0.5) = 0.25$$

4.2 (a) $P(0 \leq X < 1) = \frac{1}{3} \approx 0.3333$, $P(0 < X \leq 1) = \frac{2}{3} \approx 0.6667$, $P(-1 < X < 2) = \frac{2}{3} \approx 0.6667$,
 $P(-1 \leq X < 2) = 1$, $P(X > 0) = \frac{2}{3} \approx 0.6667$, $P(|X| > 1/2) = \frac{5}{6} \approx 0.8333$;

(b) $P(-1 < X < 0) = 0$, $P(-1 < X \leq 0) = 0.25$, $P(1 < X < 3) = 0.3$, $P(|X| > 3) = 0.075$,
 $P(|X - 1| < 1) = 0.6$; (c) nie; (d) tak.

4.3 (a) $A = 0.5$; $B = \frac{1}{\pi}$, $P(X > 0.5) = 0.25$;

(b) $A = 0$, $1 \leq B \leq 1.5$, $P(-0.75 < X < 0) = 1.75 - B$;

(c) $A = -1$, $B = \frac{1}{3}$, $P(-2 < X < 0.5) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0.2325$, $P(X > 2) = \frac{1}{6} \approx 0.1667$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz