Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Zmienne losowe. Rozkłady dyskretne i ciągłe.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **5.1**

(a) Niech X oznacza wynik rozmowy kwalifikacyjnej w skali -1 (kandydat odrzucony), 0 (kandydat do powtórnej rozmowy), 1 (kandydat przyjęty) z losowo wybranym kandydatem z dużej grupy chętnych. Rozkład tej zmiennej losowej podany jest w tabeli:

n	1	2	3
x_n	-1	0	1
p_n	$2C$	C	0.1

Wyznacz stałą C i oblicz prawdopodobieństwo, że kandydat nie zostanie od razu odrzucony.

(b) Niech $x_n = a + \frac{1}{n}$ oraz $p_n = b\frac{n}{(n+1)!}$. Wyznacz dla jakich wartości stałych $a \in \mathbb{N}$ i b ciąg $\{(x_n, p_n), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ określa rozkład pewnej dyskretnej zmiennej losowej. Następnie dla parametrów z wyznaczonego zakresu oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna ta jest większa od 6.3 i mniejsza od 7.25.

(c) W pewnej grze wygrana X wynosi n zł z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do $\frac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 5 zł.

Zadanie **5.2**

(a) Dla jakich wartości parametru p można dobrać stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \frac{c}{x^p} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

była gęstością pewnego rozkładu probabilistycznego? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Czy można dobrać stałe a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [a,b], \\ \frac{1}{|x|} & \text{dla } x \in [a,b] \end{cases}$

była gęstością pewnego rozkładu probabilistycznego? Odpowiedź uzasadnij.

(c) Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} cxe^x & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

była gęstością pewnej zmiennej losowej X?

(d) Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ cxe^x & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

była gęstością pewnej zmiennej losowej X?

Zadanie **5.3**

(a) Funkcja $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X.
Wylicz $P(0.5 \leqslant X < 1.5)$, $P(X = 0.25)$ i $P(X \geqslant 2.5)$.

(b) Dobierz stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |x| \geqslant 1, \\ c(x^2-5) & \text{dla} \quad |x| < 1 \end{cases}$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wylicz $P(0.5 \leqslant X < 1.5)$ i $P(X \geqslant -0.5)$.

(c) Dobierz stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} cx & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x \end{cases}$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej i na tej podstawie wylicz $P(0.5 \leqslant X < 1.5)$ i $P(X \geqslant 0.75)$.

Zadanie **5.4**

(a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant -0.5, \\ A + B\arcsin(x) & \text{dla} \quad -0.5 < x \leqslant 0.5, \\ 1 & \text{dla} \quad 0.5 < x \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

(b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ A - \frac{B}{1+x^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

Odpowiedzi i wskazówki:

5.1 (a) $C = 0.3$; $P(X \neq -1) = 0.4$; (b) a-dowolne, $b = 1$; dla $a = 6$ $P(6.3 < X < 7.25) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{23}{24} \approx 0.9583$, dla $a = 7$ $P(6.3 < X < 7.25) = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = \frac{1}{120} \approx 0.0083$, a dla innych a prawd. to wynosi 0; (c) $x_n = n$, $p_n = \frac{c}{n!}$ z $c = e^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$; $P(X \geqslant 5) = 1 - \frac{65}{24e} \approx 0.0037$;

5.2 (a) dla $p > 1$, wtedy $c = p - 1$; (b) tak, $a > 0$ i $b = e \cdot a$ albo $a < 0$ i $b = e^{-1} \cdot a$; (c) tak, $c = -1$; (d) nie.

5.3 (a) $P(0.5 \leqslant X < 1.5) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{arctg}(1.5) - \mathrm{arctg}(0.5)) \approx 0.162$

$P(X = 0.25) = 0$, $P(X \geqslant 2.5) = 1 - (\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(2.5) + \frac{1}{2}) \approx 0.12$;

(b) $c = -\frac{3}{28}$, $P(0.5 \leqslant X < 1.5) = \frac{53}{224} \approx 0.2366$, $P(X \geqslant -0.5) = \frac{171}{224} \approx 0.7634$;

(c) $c = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 2x - 1 - \frac{x^2}{2} & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla} \quad 2 < x, \end{cases}$

$P(0,5 \leqslant X < 1.5) = 0.75$, $P(X \geqslant 0.75) = \frac{23}{32} = 0.71875$;

5.4 (a) $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{\pi}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{dla} \quad -0.5 < x < 0.5, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$

(b) $A = B = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz