Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 6. Wartość oczekiwana, wariancja, mediana, kwartyle rozkładu prawdopodobieństwa. Transformacje zmiennej losowej.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **6.1**
Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle dyskretnego rozkładu zmiennej losowej X,

(a) gdzie X to losowa wygrana, która wynosi n zł z prawdopodobieństwem $\dfrac{e^{-1}}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (patrz też zadanie 5.1 (c)). Czy zagrałbyś w tę grę? Odpowiedź uzasadnij.

(b) gdzie X to losowa wygrana w grze, w której gracz wyciąga z talii (52 kart) trzy karty (bez zwracania) i jeśli są to 3 asy, wygrywa 100 zł. Jeśli są wśród nich dokładnie 2 asy, gracz wygrywa 50 zł. Jeśli są to 3 figury, gracz wygrywa 10 zł, a w pozostałych przypadkach płaci 1 zł (patrz zadanie 4.1 (a)). Czy zagrałbyś w tę grę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **6.2**
Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle ciągłego rozkładu zmiennej losowej X

(a) o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |x| \geqslant 1, \\ -\frac{3}{28}(x^2 - 5) & \text{dla} \quad |x| < 1. \end{cases}$.

(b) o gęstości $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x. \end{cases}$

(c) o gęstości $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

(d) o gęstości $f(x) = \begin{cases} (3/\pi)/\sqrt{1 - x^2} & \text{dla} \quad -1/2 < x < 1/2, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

(e) o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$

(f) o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

Zadanie **6.3**

Uzasadnij wzory dla wartości oczekiwanej podstawowych rozkładów probabilistycznych z listy podanej na stronie kursu.

Zadanie **6.4**

(a) Udowodnij nierówność Czebyszewa:
Jeśli istnieje wariancja D^2X, to dla każdego $a>0$ mamy

$$P(|X-\mathrm{E}X|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathrm{D}^2X}{a^2}.$$

(b) Udowodnij nierówność Markowa:
Jeśli X jest nieujemna z prawdopodobieństwem 1 oraz istnieje $\mathrm{E}X$, to dla każdego $a>0$ mamy

$$P(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathrm{E}X}{a}.$$

(c) Prawdopodobieństwo wyprodukowania wybrakowanego wiertła wynosi 0.01. Stosując nierówność Markowa oszacuj po ile wierteł należy pakować do pudełek, aby prawdopodobieństwo, że pudełko zawiera co najmniej 50 sztuk dobrych, było nie mniejsze niż 0.95.

Zadanie **6.5**

(a) Liczba cząstek wpadających do pewnego licznika to zmienna losowa X o rozkładzie Poissona $\mathcal{P}(2)$. Definiujemy nową zmienną losową Y:

$$Y=\begin{cases}X, & \text{gdy } X<3,\\ 3, & \text{gdy } X\geqslant 3.\end{cases}$$

Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y, a następnie wylicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

(b) Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0,1)$. Znajdź rozkłady zmiennych losowych $Y=4X+1$ i $Z=X^2$. Na tej podstawie wylicz - o ile to możliwe - wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych Y i Z. Następnie wylicz te parametry raz jeszcze korzystając tylko z rozkładu zmiennej losowej X.

(c) Załóżmy, że napięcie $U=U_{\max}\sin\phi$ prądu zmiennego ma losową fazę ϕ o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ i amplitudę $U_{\max}=1$. Znajdź rozkład losowego napięcia U. Na tej podstawie wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję napięcia U. Następnie wylicz te parametry raz jeszcze korzystając tylko z rozkładu zmiennej losowej ϕ.

(d) Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0,1)$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Y=\ln X$. Na tej podstawie wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną Y. Następnie wylicz ten parametr raz jeszcze korzystając tylko z rozkładu zmiennej losowej X.

(e) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(2)$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Y=1-e^{-2X}$. Na tej podstawie wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję Y. Następnie wylicz te parametry raz jeszcze korzystając tylko z rozkładu zmiennej losowej X.

(f) Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,2)$. Znajdź rozkłady zmiennych losowych $Y=\sqrt{|X|}$ i $Z=X^2$.

(g) Zmienna losowa X jest dodatnia i ma rozkład ciągły o gęstości $f(x)$. Pokaż, że zmienna losowa $Y=X^{-1}$ ma rozkład ciągły o gęstości $g(x)=x^{-2}f(x^{-1})$ dla $x\neq 0$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Odpowiedzi i wskazówki:

6.1 (a) $\mathrm{E}X = 1$, $\mathrm{D}^2X = 1$, $x_{0.5} = 1$, $x_{0.25} = 0$, $x_{0.75} = 2$;
(b) $\mathrm{E}X = -\frac{1147}{5525} \approx -0.21$ zł, $\mathrm{D}^2X = \frac{1108640316}{(5525)^2} \approx 36.32$, $x_{0.5} = -1$, $x_{0.25} = -1$, $x_{0.75} = -1$.

6.2 (a) $\mathrm{E}X = 0$, $\mathrm{D}^2X = \frac{11}{35} \approx 0.3143$, $x_{0.5} = 0$, $x_{0.25} \approx -0.46875$ (jest to rozwiązanie równania $x^3 - 15x - 7 = 0$ należące do przedziału $(-1, 1)$), $x_{0.75} = -x_{0.25} \approx 0.46875$ (jest to rozwiązanie równania $x^3 - 15x + 7 = 0$ należące do przedziału $(-1, 1)$);
(b) $\mathrm{E}X = 1$, $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{6} \approx 0.1667$, $x_{0.5} = 1$, $x_{0.25} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$, $x_{0.75} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.2929$;
(c) $\mathrm{E}X$ nie istnieje, D^2X nie jest zdefiniowana, $x_{0.5} = 0$, $x_{0.25} = -1$, $x_{0.75} = 1$;
(d) $\mathrm{E}X = 0$, $\mathrm{D}^2X = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.0865$, $x_{0.5} = 0$, $x_{0.75} = \sin\frac{\pi}{12} \approx 0.2588$, $x_{0.25} = -x_{0.75} \approx -0.2588$;
(e) $\mathrm{E}X = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$, $\mathrm{D}^2X = \infty$, $x_{0.5} = 1$, $x_{0.25} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.5773$, $x_{0.75} = \sqrt{3} \approx 1.7320$;
(f) $\mathrm{E}R = \frac{2}{3} \approx 0.6667$, $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{18} \approx 0.0555$, $x_{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$, $x_{0.25} = 0.5$, $x_{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$.

6.4 (c) Dla 63 wierteł warunki są spełnione.

6.5(a)

$y_k = k$	0	1	2	3
p_k	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	$1 - 5e^{-2}$
$\approx$	0.1354	0.2707	0.2707	0.3232

, $\mathrm{E}Y = 3 - 9e^{-2} \approx 1.78$, $\mathrm{D}^2Y = 19e^{-2} + 81e^{-4} \approx 4.05$ (wartości p_k w przybliżeniu na podstawie tablic rozkładu Poissona);

(b) Y ma rozkład $\mathcal{U}(1, 5)$, $\mathrm{E}Y = 3$, $\mathrm{D}^2Y = \frac{4}{3} \approx 1.33$,
Z ma rozkład o gęstości $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \notin (0, 1), \\ \frac{1}{2\sqrt{z}}, & \text{gdy } z \in (0, 1); \end{cases}$ $\mathrm{E}Z = \frac{1}{3} \approx 0.33$, $\mathrm{D}^2Z\frac{4}{15} \approx 0.27$;

(c) U ma rozkład o gęstości $f_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } u \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}}, & \text{gdy } u \in (-1, 1); \end{cases}$ $\mathrm{E}U = 0$, $\mathrm{D}^2U = 0.5$;

(d) Y ma rozkład o gęstości $f_Y(y) = \begin{cases} e^y, & \text{gdy } y \leqslant 0, \\ 0, & \text{gdy } y > 0, \end{cases}$ $\mathrm{E}Y = -1$;

(e) Y ma rozkład $\mathcal{U}(0, 1)$, $\mathrm{E}Y = 0.5$, $\mathrm{D}^2Y = \frac{1}{12} \approx 0.083$;

(f) Y ma rozkład o gęstości $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0, \\ \frac{4}{\sqrt{8\pi}} y e^{-\frac{y^4}{8}}, & \text{gdy } y > 0, \end{cases}$ Z ma rozkład gamma $\mathcal{G}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz