Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 7. Rozkład łączny. Rozkłady brzegowe. Niezależność zmiennych losowych. Działania na zmiennych losowych.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **7.1**

(a) Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład łączny:
$P(X = 0, Y = -1) = C$; $P(X = 0, Y = 0) = 0$; $P(X = 0, Y = 1) = 0.15$;
$P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0.25$; $P(X = 1, Y = 1) = 0.2$.
Wyznacz stałą C oraz rozkłady brzegowe tego wektora losowego. Czy X i Y są niezależne?

(b) Wyznacz rozkład łączny wektora losowego (X, Y), gdzie X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach
$P(X = 1) = 0,3$; $P(X = 2) = 0,7$;
$P(Y = 0) = 0,75$; $P(Y = 1) = 0,25$.

(c) Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie liczba podzielna przez 3. Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „2”. Opisz to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych i znajdź ich rozkład łączny.

Zadanie **7.2**

(a) Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x + 2) & \text{dla } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$ jest gęstością wektora losowego (X, Y). Oblicz $P((X, Y) \in \Delta)$, gdzie Δ to obszar $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2y$. Wyznacz rozkłady brzegowe wektora losowego (X, Y). Czy X i Y są niezależne?

(b) Dobierz stałą C tak, aby funkcja $f(x, y) = \begin{cases} Cxy(2 - x - y) & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$
była gęstością pewnego wektora losowego (X, Y). Oblicz następnie współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y. Czy X i Y są niezależne?

(c) Niech θ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, 2\pi)$, a R^2 - rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, r_0^2)$ dla pewnego $r_0 > 0$, przy czym θ i R^2 są niezależnymi zmiennymi losowymi. Pokaż, że wektor losowy (X, Y), gdzie $X = R\cos\theta$, $Y = R\sin\theta$, $R = \sqrt{R^2}$, ma rozkład jednostajny na kole $x^2 + y^2 \leqslant r_0^2$.

Zadanie **7.3**

(a) Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(3)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(2, 3)$. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = 3X - 5Y - 3$.

(b) Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(3)$, a Y rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(10, 0.2)$.
Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = 3X - 5Y + 7$.

(c) Niech $Z = X + 2Y$, gdzie X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0.3$; a Y ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 2)$, przy czym zmienne losowe X i Y są niezależne.
Oblicz współczynnik korelacji ρ_{XZ}.

Zadanie **7.4**

(a) Zmienne X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(3,5)$. Jaka jest funkcja charakterystyczna rozkładu zmiennej losowej $X+Y$, a jaka zmiennej losowej $2X-3Y$?

(b) Pokaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych odpowiednio o rozkładach gamma $\mathcal{G}(3,3)$ i $\mathcal{G}(3,6)$ ma również rozkład gamma.

(c) Pokaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych odpowiednio o rozkładach Poissona $\mathcal{P}(1)$ i $\mathcal{P}(3)$ ma również rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$. Podaj wartość parametru λ.

(d) Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,2)$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Y = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$.

Zadanie **7.5**

(a) Sznur lampek choinkowych składa się z 27 żarówek połączonych szeregowo. Żarówki psują się niezależnie, a czas świecenia każdej z nich ma taki sam rozkład Weibulla $\mathcal{W}(2,3)$. Znajdź rozkład czasu działania sznura lampek.

(b) Zmienne losowe X i Y są niezależne o takim samym rozkładzie wykładniczym o średniej 2. Oblicz $\mathrm{E}\min(X,Y)$.

Odpowiedzi i wskazówki:

7.1 (a) $C = 0.15$;

y_k \ x_n	0	1	r.brzeg. Y
-1	0.15	0.25	0.4
0	0	0.25	0.25
1	0.15	0.2	0.35
r.brzeg.X	0.3	0.7	$\sum = 1$

; X i Y nie sa niezależne;

(b)

y_k \ x_n	1	2	r.brzeg. Y
0	0.225	0.525	0.75
1	0.075	0.175	0.25
r.brzeg.X	0.3	0.7	$\sum = 1$

; (c) X - czas oczekiwania na pierwszą liczbę podzielną przez 3, Y - ilość „dwójek" wyrzuconych do chwili X. Wektor losowy (X,Y) przyjmuje wartości $(x_n, y_k) = (n,k)$, gdzie $n = 1,2,\ldots$ oraz $k = 0,1,\ldots,n-1$; $p_{nk} = \binom{n-1}{k}(1/6)^k(1/2)^{n-1-k}(1/3)$;

7.2 (a) $P((X,Y)\in\Delta) = \frac{2123}{2160} \approx 0.9829$; $f_X(x) = \begin{cases} (2/9)(5x+2) & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x, \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{dla } 0<y<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y; \end{cases}$ X i Y są niezależne;

(b) $C = 6$, $\rho_{XY} = -\frac{5}{43} \approx -0.1163 \neq 0$, stąd X i Y nie są niezależne;

7.3 (a) $\mathrm{E}Z = -12$, $\mathrm{D}^2Z = 226$; (b) $\mathrm{E}Z = 6$, $\mathrm{D}^2Z = 67$; (c) $\rho_{XZ} = \frac{0.21}{\sqrt{0.21\cdot 16.21}} \approx 0.1138$

7.4 (a) $\varphi_{X+Y}(t) = e^{-|t|}\cdot e^{3it-\frac{25}{2}t^2}$, $\varphi_{2X-3Y}(t) = e^{-2|t|}\cdot e^{-9it-\frac{225}{2}t^2}$; (b) jest to rozkład $\mathcal{G}(3,9)$; (c) $\lambda = 4$; (d) jest to rozkład $\mathcal{N}(0,2)$

7.5 (a) jest to rozkład $\mathcal{W}(6,3)$; (b) $\mathrm{E}\min(X,Y) = 1$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz