Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Twierdzenie Poissona. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a. Centralne Twierdzenie Graniczne Lindeberga-Lévy'ego.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **8.1**

(a) Prawdopodobieństwo, że dowolna osoba odpowie na przesłaną pocztą reklamę i zamówi towar, wynosi 0.03. Reklamę wysłano do 200 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że (1) dokładnie 5 osób, (2) mniej niż 5 osób przyśle zamówienia. Obliczenia wykonać metodą dokładną oraz przybliżoną z tw. Poissona. Porównać wyniki.

(b) Przy badaniach na nosicielstwo pewnego wirusa prawdopodobieństwo natrafienia na nosiciela wynosi 0.005. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 1000 badanych będzie mniej niż 4 nosicieli. Oszacować błąd przybliżenia.

(c) Licznik Geigera-Millera i źródło promieniowania umieszczono względem siebie tak, że szansa zarejestrowania cząstki wynosi 0.001. W czasie obserwacji ciało radioaktywne wypromieniowało 2000 cząstek. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo zarejestrowania przez licznik (1) braku cząstek; (2) mniej niż 4 cząstek; (3) więcej niż 2 cząstek. Oszacować błąd przybliżenia.

(d) Książkę wydano w nakładzie 5000 egzemplarzy. Szansa na to, że egzemplarz zostanie źle oprawiony jest równa 0.001. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacować prawdopodobieństwo tego, że w nakładzie pojawią się co najmniej 3 wybrakowane oprawy.

Zadanie **8.2**

(a) W pewnym dużym okręgu wyborczym ma zostać przeprowadzone referendum w sprawie budowy elektrowni atomowej. Wśród uprawnionych do głosowania mieszkańców 45% popiera tę inwestycję, a 55% jest przeciw. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia projektu w referendum, w których weźmie udział tylko 200 osób wybranych losowo. Oszacować błąd przybliżenia.

(b) Jeśli gracz wyrzuci kostką 6 oczek, to wygrywa 4 zł. Jeśli nie, przegrywa 1 zł. Oszacować prawdopodobieństwo tego, że w 1000 rzutach gracz przegra co najwyżej 20 zł. Oszacować błąd przybliżenia.

(c) W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 100000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczną składkę 50 zł za samochód. Średnio 9 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 5000 zł. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku towarzystwo nie poniesie strat. Oszacować błąd przybliżenia.

(d) Prawdopodobieństwo, że dowolna osoba odpowie na przesłaną pocztą reklamę i zamówi towar, wynosi 0.03. Reklamę wysłano do 200 osób. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że (1) dokładnie 5 osób, (2) mniej niż 5 osób przyśle zamówienia. Oszacować błąd przybliżenia. Porównać wyniki z otrzymanymi w zadaniu 8.1(a) metodą dokładną i przybliżoną z tw. Poissona.

Zadanie **8.3**

(a) Czas oczekiwania na tramwaj linii 14 jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 20 minut. Pan Piotr codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego prawdopodobieństwo, że pan Piotr traci w ciągu 160 kolejnych dni roboczych na czekanie na tramwaj linii 14 więcej niż 2500 minut.

(b) Czas pracy lampy pewnego typu ma rozkład wykładniczy o średniej 100 dni. Na podstawie tw. Lindeberga–Lévy'ego oszacować, czy wystarczy mieć w zapasie 169 lamp, aby z prawdopodobieństwem 0.9 wystarczyło ich na 15000 dni nieprzerwanej pracy. (Przyjmujemy, że spalona lampa jest natychmiast wymieniana na nową.)

(c) Pewna konstrukcja składa się ze 500 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 1755 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwaną 3.5 kg i odchylenie standardowe 0.5 kg?

(d) Samolot zabiera na pokład 70 osób. Waga pasażerów ma pewien rozkład o wartości oczekiwanej 75 kg i wariancji 25 kg^2. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego prawdopodobieństwo, że łączna waga pasażerów przekroczy 5300 kg.

(e) W grupie studenckiej przeprowadza się test, w którym można uzyskać do 100 punktów. Średni wynik uzyskiwany przez studenta wynosi 40 pkt, a wariancja 20^2. Wyniki studentów są niezależne i o takim samym rozkładzie. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego prawdopodobieństwo tego, że przeciętna liczba punktów przypadająca na jednego studenta w grupie 150 osób zawiera się w przedziale od 35 do 45 pkt.

Odpowiedzi i wskazówki:

8.1 (a)

	wzory dokładne	z tw. Poissona
(1)	0.1622	0.1606
(2)	0.2810	0.2851

; (b) 0.2650; błąd przybl. nie przekracza 0.025;

(c) (1) 0.1353; (2) 0.8571; (3) 0.3233; błąd przybl. nie przekracza 0.002;
(d) 0.8754; błąd przybl. nie przekracza 0.005.

8.2 (a) 0.9319 ± 0.036; (b) 0.0071 ± 0.031; (c) 0.9996 ± 0.017; (d) (1) 0.1492 ± 0.4; (2) 0.2676 ± 0.2;

8.3 (a) ≈ 0.9972; (b) tak; (c) ≈ 0.6736; (d) ≈ 0.1170; (e) ≈ 0.9978.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz