Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Rozwiązania zadań z listy 9. Warunkowa wartość oczekiwana. Rozkłady warunkowe. Rozkłady stabilne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **9.1** Niech $\mathrm{E}|X| < \infty$ oraz σ-ciało $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Pokaż, że

(a) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})) = \mathrm{E}X$.
Rozwiązanie:
Ponieważ $\Omega \in \mathcal{G}$ dla dowolnego σ–ciała $\mathcal{G}$, mamy z drugiego warunku na w.w.o. dla $G = \Omega$

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})) = \int_\Omega \mathrm{E}(X|\mathcal{G})\,dP = \int_\Omega X\,dP = \mathrm{E}X.$$

(b) $\mathrm{E}(aX+bY|\mathcal{G}) = a\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$ p.n., gdzie a, b są dowolnymi stałymi.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że $a\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$ jest funkcją $\mathcal{G}$–mierzalną jako kombinacja liniowa takich funkcji. Ponadto

$$\int_G (a\mathrm{E}(X|\mathcal{G})+b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))\,dP = a\int_G \mathrm{E}(X|\mathcal{G})\,dP + b\int_G \mathrm{E}(Y|\mathcal{G})\,dP =$$
$$= a\int_G X\,dP + b\int_g Y\,dP = \int_G (aX+bY)\,dP.$$

Zatem $a\mathrm{E}(X|\mathcal{G})+b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$ spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej $aX+bY$ względem $\mathcal{G}$, więc $\mathrm{E}(aX+bY|\mathcal{G}) = a\mathrm{E}(X|\mathcal{G})+b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$ p.n.

(c) jeżeli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = X$ p.n.
Rozwiązanie:
X, która jest $\mathcal{G}$–mierzalna, spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej X względem $\mathcal{G}$.

(d) jeżeli X jest niezależna od $\mathcal{G}$, to $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}X$ p.n.
Rozwiązanie:
Mamy pokazać, że funkcja stała równa $\mathrm{E}X$ spełnia oba warunki na w.w.o. zmiennej losowej X względem $\mathcal{G}$. Dowolna funkcja stała jest $\mathcal{G}$–mierzalna, więc warunek pierwszy jest spełniony. Sprawdźmy warunek drugi. Dla dowolnego $G \in \mathcal{G}$ zmienna losowa X jest niezależna od $\mathbb{1}_G$, gdzie $\mathbb{1}_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = a, \\ 0, & \text{gdy } x \neq a. \end{cases}$ Mamy więc

$$\int_G X\,dP = \mathrm{E}(\mathbb{1}_G X) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_G)\mathrm{E}X = \int_G (\mathrm{E}X)\,dP.$$

Pokazaliśmy zatem, że $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}X$ p.n.

(e) dla $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ mamy $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$ p.n.
Rozwiązanie:
Wiemy, że $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$ jest $\mathcal{G}_1$–mierzalna, a ponieważ $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, również $\mathcal{G}$–mierzalna. Zatem z (c) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$ p.n. Z drugiej strony, dla dowolnego $G \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ mamy

$$\int_G \mathrm{E}(X|\mathcal{G})\,dP = \int_G X\,dP = \int_G \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)\,dP$$

i stąd $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$ p.n.

Zadanie **9.2** Wyznacz rozkłady warunkowe X pod warunkiem Y oraz Y pod warunkiem X oraz odpowiadające im warunkowe wartości oczekiwane dla wektora losowego (X, Y) o podanym rozkładzie.

(a)

	x_n	0	1
y_k			
-1		0.15	0.25
0		0	0.25
1		0.15	0.2

Rozwiązanie:

- Wyznaczamy rozkład warunkowy X względem Y:

  $P(X=0|Y=-1) = \dfrac{P(X=0, Y=-1)}{P(Y=-1)} = \dfrac{0.15}{0.4} = \dfrac{3}{8}$

  Podobnie wyliczamy pozostałe prawdopodobieństwa warunkowe, a wyniki umieszczamy w tabeli:

x_n	0	1
$P(X=x_n\|Y=-1)$	3/8	5/8
$P(X=x_n\|Y=0)$	0	1
$P(X=x_n\|Y=1)$	3/7	4/7

  Na podstawie tabeli otrzymujemy:

  $\mathrm{E}(X|Y=-1) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$
  $\mathrm{E}(X|Y=0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$
  $\mathrm{E}(X|Y=1) = 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$
  co można zapisać razem jako:
  $\mathrm{E}(X|Y) = \frac{5}{8}\mathbb{1}_{-1}(Y) + \mathbb{1}_0(Y) + \frac{4}{7}\mathbb{1}_1(Y)$ p.n.

- Wyznaczamy rozkład warunkowy Y względem X:

  $P(Y=-1|X=0) = \dfrac{P(X=0, Y=-1)}{P(X=0)} = \dfrac{0.15}{0.3} = \dfrac{1}{2}$

  Podobnie wyliczamy pozostałe prawdopodobieństwa warunkowe, a wyniki umieszczamy w tabeli:

y_k	-1	0	1
$P(Y=y_k\|X=0)$	1/2	0	1/2
$P(Y=y_k\|X=1)$	5/14	5/14	4/14

  Na podstawie tabeli otrzymujemy:

  $\mathrm{E}(Y|X=0) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0;$
  $\mathrm{E}(Y|X=1) = -1 \cdot \frac{5}{14} + 0 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{4}{14} = -\frac{1}{14};$
  co można zapisać razem jako:
  $\mathrm{E}(Y|X) = -\frac{1}{14}\mathbb{1}_1(X)$ p.n.;

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(b) rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x+2) & \text{dla } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Rozwiązanie:

- W zadaniu 7.2 wyliczyliśmy rozkłady brzegowe $f_X(x) = \begin{cases} (2/9)(5x+2) & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x, \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{dla } 0<y<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y; \end{cases}$ oraz stwierdziliśmy, że X i Y są niezależne;
- Zatem $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ oraz $\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}X = \frac{2}{9}\int_0^1 x(5x+2)dx = \frac{16}{27}$ p.n.
- Podobnie $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ oraz $\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}Y = 4\int_0^1 y\cdot y^3 dy = 0.8$ p.n.

(c) rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Rozwiązanie:

- Rola x i y w gęstości łącznej jest symetryczna, zatem wystarczy rozpatrywać tylko X pod warunkiem Y
- Wyznaczymy najpierw rozkład brzegowy:
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} y(4-3y) & \text{dla } 0<y<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y. \end{cases}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{6x(2-x-y)}{4-3y} & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x, \end{cases}$ gdzie $0<y<1$.
- $\mathrm{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x\dfrac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx = \dfrac{2.5-2y}{4-3y}$ dla $0<y<1$.
  Zatem $\mathrm{E}(X|Y) = \dfrac{2.5-2Y}{4-3Y}$ p.n.
- $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{6y(2-x-y)}{4-3x} & \text{dla } 0<y<1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y, \end{cases}$ gdzie $0<x<1$,
  oraz $\mathrm{E}(Y|X) = \dfrac{2.5-2X}{4-3X}$ p.n.

Zadanie **9.3** Niech (X,Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{2} & \text{dla } 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$
Wyznacz $\mathrm{E}(X|Y)$, $\mathrm{E}(X+XY|X)$, $\mathrm{E}(X+XY|X=\pi/2)$, $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y)$.

Rozwiązanie:

- Wyznaczymy najpierw rozkład brzegowy:
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{\cos y+\sin y}{2} & \text{dla } 0\leqslant y\leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y. \end{cases}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos y+\sin y} & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x, \end{cases}$ gdzie $0\leqslant y\leqslant \pi/2$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- $\mathrm{E}(X|Y=y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} x\frac{\sin(x+y)}{\cos y+\sin y}dx = \frac{\cos y+(\pi/2-1)\sin y}{\cos y+\sin y}$ dla $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.
  Zatem $\mathrm{E}(X|Y) = \dfrac{\cos Y+(\pi/2-1)\sin Y}{\cos Y+\sin Y}$ p.n.

- Z symetrycznej roli x i y we wzorze na gęstość można wywnioskować, że
  $\mathrm{E}(Y|X) = \dfrac{\cos X+(\pi/2-1)\sin X}{\cos X+\sin X}$ p.n.

- Z własności w.w.o. $\mathrm{E}(X+XY|X) = \mathrm{E}(X|X)+\mathrm{E}(XY|X) = X+X\mathrm{E}(Y|X)$. Zatem
  $\mathrm{E}(X+XY|X) = X\left(1+\dfrac{\cos X+(\pi/2-1)\sin X}{\cos X+\sin X}\right)$ p.n. oraz $\mathrm{E}(X+XY|X=\pi/2) = (\pi/2)^2$.

- Z symetrycznej roli x i y we wzorze na gęstość i w sumie $x+y$ można wywnioskować, że
  $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y) = \mathrm{E}(Y^2+XY|X+Y) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y) + \mathrm{E}(Y^2+XY|X+Y)) =$
  $= \frac{1}{2}\mathrm{E}((X+Y)^2|X+Y) = \frac{1}{2}((X+Y)^2$ p.n.[A]

Zadanie $\boxed{\mathbf{9.4}}$

(a) Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie liczba podzielna przez 3. Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „2". Opisać to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych X i Y (gdzie X to czas oczekiwania na liczbę podzielną przez 3). Znaleźć ich rozkład łączny, rozkład brzegowy X oraz rozkład warunkowy Y pod warunkiem X. Wyznaczyć $\mathrm{E}X$ oraz $\mathrm{E}(Y|X)$, a na tej podstawie także $\mathrm{E}Y$.

Rozwiązanie:

- Rozkład łączny wyznaczyliśmy w zad.7.1(c). Niech X oznacza czas oczekiwania na pierwszą liczbę podzielną przez 3, a Y - ilość „2" wyrzuconych do chwili X. Wektor losowy (X,Y) przyjmuje wartości $(x_n,y_k) = (n,k)$, gdzie $n=1,2,\ldots$ oraz $k=0,1,\ldots,n-1$; z prawdop. $p_{nk} = P(X=n, Y=k) = \binom{n-1}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{1}{2})^{n-1-k}\frac{1}{3}$

- $P(X=n) = p_{n\cdot} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{nk} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{1}{2})^{n-1-k}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$, $n=1,2,\ldots$,
  czyli X ma rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(\frac{1}{3})$, a w konsekwencji $\mathrm{E}X = 3$.

- $P(Y=k|X=n) = \dfrac{p_{nk}}{p_{n\cdot}} = \dfrac{\binom{n-1}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{1}{2})^{n-1-k}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}} = \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-k}$
  dla $k=0,1,\ldots,n-1$,
  czyli rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X=n$ to rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(n-1,\frac{1}{4})$.
  Zatem $\mathrm{E}(Y|X=n) = \frac{1}{4}(n-1)$, czyli $\mathrm{E}(Y|X) = \frac{1}{4}(X-1)$

- $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}\frac{1}{4}(X-1) = \frac{1}{4}(\mathrm{E}X-1) = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

[A] Inny sposób wyliczenia: Z własności w.w.o. mamy $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y) = \mathrm{E}((X+Y)X|X+Y) = (X+Y)\mathrm{E}(X|X+Y)$ p.n. Wyznaczyć $\mathrm{E}(X|X+Y)$ możemy podobnie jak $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y)$ albo możemy znaleźć gęstość rozkładu wektora losowego $(X,X+Y)$ i skorzystać z odpowiednich wzorów na gęstość warunkową i w.w.o. Mamy $(X,X+Y) = g(X,Y)$, $g^{-1}(x,z) = (x,z-x)$, jakobian tego przekształcenia równy jest 1 i stąd $(X,X+Y)$ ma rozkład o gęstości

$$\begin{aligned} f(x,z-x) &= \frac{\sin z}{2}\mathbb{1}_{[0,\pi/2]}(x)\mathbb{1}_{[x,\pi/2-x]}(z) = \\ &= \frac{\sin z}{2}(\mathbb{1}_{[0,z]}(x)\mathbb{1}_{[0,\pi/2]}(z)+\mathbb{1}_{[z-\pi/2,\pi/2]}(x)\mathbb{1}_{[\pi/2,\pi]}(z)). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $E(X|X+Y) = \dfrac{X+Y}{2}$ p.n.

(b) Wiemy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y$ to rozkład Poissona z parametrem y, a Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(2, 4)$. Pokaż, że X ma rozkład ujemny dwumianowy. Wyznacz jego parametry.

Rozwiązanie:

- Mamy $P(X = n|Y = y) = \dfrac{y^n}{n!}e^{-y}$ dla $n = 0, 1, \ldots$, gdzie Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(2, 4)$, czyli rozkład ciągły o gęstości $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0, \\ (8/3)y^3e^{-2y}, & \text{gdy } y > 0; \end{cases}$ $(\Gamma(4) = 3! = 6)$.
- Zatem dla $n = 0, 1, \ldots$ otrzymujemy
  $P(X = n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(X = n|Y = y)f_Y(y)dy = \int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{y^n}{n!}e^{-y}(8/3)y^3e^{-2y}dy =$
  $= \dfrac{8}{3n!}\int\limits_{0}^{\infty} y^{(n+4)-1}e^{-3y}dy = \dfrac{2\cdot 8}{2\cdot 3n!}\dfrac{\Gamma(n+4)}{3^{n+4}} = \dfrac{((n+4)-1)!}{n!(4-1)!}\dfrac{16}{3^{n+4}} =$
  $= \dbinom{(n+4)-1}{4-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{(n+4)-4}.$
  Widać stąd, że $P(X + 4 = k) = \dbinom{k-1}{4-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{k-4}$ dla $k = 4, 5, \ldots$, czyli $X + 4$ ma rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}(4, 2/3)$.

Zadanie **9.5**

(a) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne i mają taki sam rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ jak zmienna losowa Y, to dla dowolnych stałych $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \stackrel{d}{=} \lambda Y + \delta$$

dla pewnych stałych $\lambda > 0$, δ (zależnych od λ_1 i λ_2). Wyznacz postać stałych $\lambda > 0$, δ.

Rozwiązanie:

- Zmienne losowe Y_1, Y_2 i Y mają fumkcję charakterystyczną postaci

$$\varphi_{\alpha,\beta,m,c}(t) = \exp\{imt - |ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\},$$

  gdzie $l(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ -\operatorname{sgn}(t)\dfrac{2}{\pi}\ln|t| & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$
- Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej $\lambda Y + \delta$ ma postać $\mathrm{E}e^{it(\lambda Y+\delta)} = e^{i\delta t}\varphi_{\alpha,\beta,m,c}(\lambda t) = \exp\{i(\delta + m\lambda)t - |c\lambda t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda t))\}$
- Zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne, więc funkcja charakterystyczna sumy $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ ma postać $\mathrm{E}e^{it(\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2)} = \varphi_{\alpha,\beta,m,c}(\lambda_1 t)\varphi_{\alpha,\beta,m,c}(\lambda_2 t) =$
  $= \exp\{im(\lambda_1 + \lambda_2)t - |c\lambda_1 t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda_1 t)) - |c\lambda_2 t|^\alpha(1 - i\beta l(\lambda_2 t))\}.$
- Zauważmy, że dla $\lambda > 0$ mamy $l(\lambda t) = \begin{cases} l(t) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ l(t) - \operatorname{sgn}(t)\dfrac{2}{\pi}\ln\lambda & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- Stąd mamy $\mathrm{E}e^{it(\lambda Y+\delta)} = \begin{cases} \exp\{i(\delta+m\lambda)t - |c\lambda t|^\alpha(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(\delta+m\lambda)t - |c\lambda t|(1-i\beta l(t) + i\beta \mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln\lambda)\} & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \exp\{i(\delta+m\lambda)t - \lambda^\alpha|ct|^\alpha(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(\delta+m\lambda - \frac{2}{\pi}c\beta\lambda\ln\lambda)t - \lambda|ct|(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

  Z drugiej strony, $\mathrm{E}e^{it(\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2)} =$

$$= \begin{cases} \exp\{im(\lambda_1+\lambda_2)t - (\lambda_1^\alpha+\lambda_2^\alpha)|ct|^\alpha(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{im(\lambda_1+\lambda_2)t - |c(\lambda_1+\lambda_2)t|(1-i\beta l(t)) - i\beta|ct|\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}(\lambda_1\ln\lambda_1+\lambda_2\ln\lambda_2)\} & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \exp\{im(\lambda_1+\lambda_2)t - (\lambda_1^\alpha+\lambda_2^\alpha)|ct|^\alpha(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \exp\{i(m(\lambda_1+\lambda_2) - \frac{2}{\pi}c\beta(\lambda_1\ln\lambda_1+\lambda_2\ln\lambda_2))t - (\lambda_1+\lambda_2)|ct|(1-i\beta l(t))\} & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

- Porównując, otrzymujemy, że $\mathrm{E}e^{it(\lambda Y+\delta)} = \mathrm{E}e^{it(\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2)}$

  dla $\lambda = (\lambda_1^\alpha+\lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}$, $\delta = \begin{cases} m(\lambda_1+\lambda_2-(\lambda_1^\alpha+\lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}c\beta\left((\lambda_1+\lambda_2)\ln(\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1\ln\lambda_1 - \lambda_2\ln\lambda_2\right) & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$

(b) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma,1,0,1)$ dla pewnego $0<\gamma<1$, a Y - o rozkładzie standardowym normalnym, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X = Z^{1/2}Y$.

Rozwiązanie:

- Rozkład wyznaczymy posługując się funkcją charakterystyczną. Oznaczmy funkcję charakterystyczną Y przez $\varphi_Y(t)$, a transformatę Laplace'a Z przez $\psi_Z(t)$.
- Mamy $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \mathrm{E}e^{itZ^{1/2}Y} = \mathrm{E}\mathrm{E}(e^{itZ^{1/2}Y}|Z)$.
- Ponieważ Z i Y są niezależne, $\mathrm{E}(e^{itZ^{1/2}Y}|Z) = \mathrm{E}(e^{itz^{1/2}Y}|Z)|_{z=Z} = \mathrm{E}(e^{itz^{1/2}Y})|_{z=Z} = \varphi_Y(tz^{1/2})|_{z=Z} = \exp\left(-\frac{1}{2}(tz^{1/2})^2\right)|_{z=Z} = e^{-\frac{t^2}{2}Z}$
- Zatem $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{-\frac{t^2}{2}Z} = \psi_Z(t^2/2) = e^{-(t^2/2)^\gamma/\cos(\pi\gamma/2)} = e^{-|ct|^{2\gamma}}$ dla $c^{2\gamma} = 2^{-\gamma}(\cos(\pi\gamma/2))^{-1}$
- Wynika stąd, że X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(2\gamma,0,0,2^{-1/2}\,(\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(2\gamma)})$.

(c) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma,1,0,1)$ dla pewnego $0<\gamma<1$, a Y - o rozkładzie $\mathcal{S}(\alpha,0,0,1)$ z $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, $\alpha \neq 1/\gamma$, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X = Z^{1/\alpha}Y$.

Rozwiązanie:

- Zastosujemy metodę z punktu (b). Oznaczmy funkcję charakterystyczną Y przez $\varphi_Y(t)$, a transformatę Laplace'a Z przez $\psi_Z(t)$.
- Mamy $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \mathrm{E}e^{itZ^{1/\alpha}Y} = \mathrm{E}\mathrm{E}(e^{itZ^{1/\alpha}Y}|Z)$.
- Ponieważ Z i Y są niezależne, $\mathrm{E}(e^{itZ^{1/\alpha}Y}|Z) = \mathrm{E}(e^{itz^{1/\alpha}Y}|Z)|_{z=Z} = \mathrm{E}(e^{itz^{1/\alpha}Y})|_{z=Z} = \varphi_Y(tz^{1/\alpha})|_{z=Z} = \exp\left(-|tz^{1/\alpha}|^\alpha\right)|_{z=Z} = e^{-|t|^\alpha Z}$
- Zatem $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{-|t|^\alpha Z} = \psi_Z(|t|^\alpha) = e^{-(|t|^\alpha)^\gamma/\cos(\pi\gamma/2)} = e^{-|ct|^{\alpha\gamma}}$ dla $c^{\alpha\gamma} = (\cos(\pi\gamma/2))^{-1}$
- Wynika stąd, że X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha\gamma,0,0,(\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(\alpha\gamma)})$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(d) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Pareto z parametrami $0 < a < 2$, $A > 0$. Wyznacz a_n, b_n, dla których $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n}$ ma niezdegenerowany rozkład graniczny przy $n \to \infty$. Podaj ten rozkład graniczny.

Rozwiązanie:

- X_i ma rozkład Pareto z parametrami $0 < a < 2$, $A > 0$, czyli rozkład o dystrybuancie
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1}{(1+Ax)^a}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$
- Rozkład ten należy do normalnego obszaru przyciągania rozkładu stabilnego $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z $\alpha = a$ i $\beta = 1$, ponieważ dla $c_0 = A^{-1}$ i $\alpha = a$ mamy
$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(-x) + 1 - F(x)}{(x/c_0)^{-\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{0 + 1 - (1 - (1+Ax)^{-a})}{(Ax)^{-a}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{Ax} + 1\right)^{-a} = 1$$
oraz dla $\beta = 1$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{F(-x) + 1 - F(x)} = 1 = \frac{1+\beta}{2}.$$
- Wówczas wiemy, że dla
$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1, \\ n\mathrm{E}X_i, & \text{gdy } 1 < a < 2, \\ n^2 \frac{\pi}{2A} \mathrm{E} \sin\left(\frac{2AX_i}{\pi n}\right), & \text{gdy } a = 1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1, \\ \dfrac{n}{A(a-1)}, & \text{gdy } 1 < a < 2, \\ \dfrac{n}{A} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(2x/\pi n)}{1+x} dx, & \text{gdy } a = 1, \end{cases}$$
oraz
$$b_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\Gamma(2-a)\cos(\pi a/2)}{1-a}\right)^{1/a} A^{-1} n^{1/a}, & \text{gdy } a \neq 1, \\ (\pi/2) A^{-1} n, & \text{gdy } a = 1, \end{cases}$$
mamy
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y,$$
gdzie Y ma rozkład $\mathcal{S}(a, 1, 0, 1)$ (czyli rozkład graniczny to $\mathcal{S}(a, 1, 0, 1)$).
- Obliczenia pomocnicze:
Rozkład Pareto jest ciągły o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ (1 - (1+Ax)^{-a})' = aA(1+Ax)^{-a-1}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$
Zatem dla $1 < a < 2$ mamy
$\mathrm{E}X_i = \int\limits_0^\infty xaA(1+Ax)^{-a-1} dx = [y = 1 + Ax] = aA^{-1} \int\limits_1^\infty (y-1) y^{-a-1} dy = aA^{-1} \left(\frac{y^{-a+1}}{-a+1} - \frac{y^{-a}}{-a}\right)\Big|_{y=1}^{y=\infty} =$
$= aA^{-1}\left(-\frac{1}{-a+1} + \frac{1}{-a}\right) = \frac{1}{A(a-1)}$
Natomiast dla $a = 1$ otrzymujemy
$\mathrm{E}\sin\left(\frac{2AX_i}{\pi n}\right) = \int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{2Ax}{\pi n}\right) A(1+Ax)^{-2} dx = [Ax = y] = \int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{2y}{\pi n}\right)(-(1+y)^{-1})' dy =$
$= 0 + \frac{2}{\pi n} \int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{2y}{\pi n}\right)(1+y)^{-1} dy.$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz