Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 9. Warunkowa wartość oczekiwana. Rozkłady warunkowe. Rozkłady stabilne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Zadanie **9.1** Niech $\mathrm{E}|X| < \infty$ oraz σ-ciało $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Pokaż, że

(a) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})) = \mathrm{E}X$;

(b) $\mathrm{E}(aX+bY|\mathcal{G}) = a\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$ p.n., gdzie a, b są dowolnymi stałymi.

(c) jeżeli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = X$ p.n.;

(d) jeżeli X jest niezależna od $\mathcal{G}$, to $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}X$ p.n.

(e) dla $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ mamy $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$ p.n.

Zadanie **9.2** Wyznacz rozkłady warunkowe X pod warunkiem Y oraz Y pod warunkiem X oraz odpowiadające im warunkowe wartości oczekiwane dla wektora losowego (X, Y) o podanym rozkładzie.

(a)

	x_n	0	1
y_k			
-1		0.15	0.25
0		0	0.25
1		0.15	0.2

;

(b) rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x+2) & \text{dla } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

(c) rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Zadanie **9.3** Niech (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{2} & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$
Wyznacz $\mathrm{E}(X|Y)$, $\mathrm{E}(X+XY|X)$, $\mathrm{E}(X+XY|X=\pi/2)$, $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y)$.

Zadanie **9.4**

(a) Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie liczba podzielna przez 3. Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „2”. Opisać to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych X i Y (gdzie X to czas oczekiwania na liczbę podzielną przez 3). Znaleźć ich rozkład łączny, rozkład brzegowy X oraz rozkład warunkowy Y pod warunkiem X. Wyznaczyć $\mathrm{E}X$ oraz $\mathrm{E}(Y|X)$, a na tej podstawie także $\mathrm{E}Y$.

(b) Wiemy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y$ to rozkład Poissona z parametrem y, a Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(2, 4)$. Pokaż, że X ma rozkład ujemny dwumianowy. Wyznacz jego parametry.

Zadanie **9.5**

(a) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne i mają taki sam rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha,\beta,m,c)$ jak zmienna losowa Y, to dla dowolnych stałych $\lambda_1,\lambda_2>0$

$$\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2 \stackrel{d}{=} \lambda Y+\delta$$

dla pewnych stałych $\lambda>0$, δ (zależnych od λ_1 i λ_2). Wyznacz postać stałych $\lambda>0$, δ.

(b) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma,1,0,1)$ dla pewnego $0<\gamma<1$, a Y - o rozkładzie standardowym normalnym, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X=Z^{1/2}Y$.

(c) Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma,1,0,1)$ dla pewnego $0<\gamma<1$, a Y - o rozkładzie $\mathcal{S}(\alpha,0,0,1)$ z $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, $\alpha\neq 1/\gamma$, przy czym Z i Y są niezależne. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X=Z^{1/\alpha}Y$.

(d) Niech X_1, $X_2,\ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Pareto z parametrami $0<a<2$, $A>0$. Wyznacz a_n, b_n, dla których $\dfrac{X_1+\ldots+X_n-a_n}{b_n}$ ma niezdegenerowany rozkład graniczny przy $n\to\infty$. Podaj ten rozkład graniczny.

Odpowiedzi i wskazówki:

9.2 (a)

x_n	0	1
$P(X=x_n\mid Y=-1)$	3/8	5/8
$P(X=x_n\mid Y=0)$	0	1
$P(X=x_n\mid Y=1)$	3/7	4/7

; $\mathrm{E}(X|Y)=\frac{5}{8}\mathbb{1}_{-1}(Y)+\mathbb{1}_0(Y)+\frac{4}{7}\mathbb{1}_1(Y)$ p.n.,

y_k	-1	0	1
$P(Y=y_k\mid X=0)$	1/2	0	1/2
$P(Y=y_k\mid X=1)$	5/14	5/14	4/14

; $\mathrm{E}(Y|X)=-\frac{1}{14}\mathbb{1}_1(X)$ p.n.;

(b) zmienne losowe niezależne (patrz Zad. 7.2(a)), więc rozkłady warunkowe takie same jak brzegowe (patrz Zad. 7.2(a)), a warunkowe wartości oczekiwane są równe zwykłym wartościom oczekiwanym, czyli $\mathrm{E}(X|Y)=\mathrm{E}X=16/27$ p.n, $\mathrm{E}(Y|X)=\mathrm{E}Y=0.8$ p.n.; (c) dla $0\leqslant y<1$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{6x(2-x-y)}{4-3y} & \text{dla } 0<x<1,\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases};$$

$$\mathrm{E}(X|Y)=\frac{2.5-2Y}{4-3Y}\ \text{p.n.}$$

dla $0<x<1$ $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{6y(2-x-y)}{4-3x} & \text{dla } 0<y<1,\\ 0 & \text{dla pozostałych } y\end{cases};$

$$\mathrm{E}(Y|X)=\frac{2.5-2X}{4-3X}\ \text{p.n.}$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

9.3 $\mathrm{E}(X|Y) = \dfrac{\cos Y+(\pi/2-1)\sin Y}{\cos Y+\sin Y}$ p.n.; $\mathrm{E}(X+XY|X) = X\left(1+\dfrac{\cos X+(\pi/2-1)\sin X}{\cos X+\sin X}\right)$ p.n.; $\mathrm{E}(X+XY|X=\pi/2) = (\pi/2)^2$; $\mathrm{E}(X^2+XY|X+Y) = \frac{1}{2}(X+Y)^2$ p.n.

9.4 (a) X - czas oczekiwania na pierwszą liczbę podzielną przez 3,
Y - ilość „2" wyrzuconych do chwili X.
(X,Y) przyjmuje wartości $(x_n, y_k) = (n,k)$, gdzie $n = 1,2,\ldots$ oraz $k = 0,1,\ldots,n-1$; z prawdop.
$p_{nk} = P(X=n, Y=k) = \binom{n-1}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{1}{2})^{n-1-k}\frac{1}{3}$
$P(X=n) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$, $n = 1,2,\ldots$, $\mathrm{E}X = 3$
$P(Y=k|X=n) = \binom{n-1}{k}(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{n-1-k}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\mathrm{E}(Y|X) = \frac{1}{4}(X-1)$
$\mathrm{E}Y = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}\frac{1}{4}(X-1) = \frac{1}{4}(\mathrm{E}X-1) = \frac{1}{2}$;
(b) $\mathcal{NB}\left(4, \frac{2}{3}\right)$.

9.5 (a) $\lambda = (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}$, $\delta = \begin{cases} m(\lambda_1+\lambda_2-(\lambda_1^\alpha+\lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}c\beta\left((\lambda_1+\lambda_2)\ln(\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1\ln\lambda_1 - \lambda_2\ln\lambda_2\right) & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$;
(b) X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(2\gamma, 0, 0, 2^{-1/2}(\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(2\gamma)})$;
(c) X ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha\gamma, 0, 0, (\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(\alpha\gamma)})$;
(d) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a<1, \\ \dfrac{n}{A(a-1)}, & \text{gdy } 1<a<2, \\ \dfrac{n}{A}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos(2x/\pi n)}{1+x}dx, & \text{gdy } a=1, \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\Gamma(2-a)\cos(\pi a/2)}{1-a}\right)^{1/a} A^{-1}n^{1/a}, & \text{gdy } a\neq 1, \\ (\pi/2)A^{-1}n, & \text{gdy } a=1, \end{cases}$,
rozkład graniczny to $\mathcal{S}(a,1,0,1)$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz