Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332
Matematyka Stosowana
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wykładowca: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Wykład 6a:

Podstawowe dyskretne i ciągłe rozkłady probabilistyczne.

Rozkład dwumianowy (inaczej Bernoulliego) z parametrami $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{B}(n, p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Rozkład dwumianowy (inaczej Bernoulliego) z parametrami $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{B}(n, p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- Jest to rozkład ilości sukcesów w n doświadczeniach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

Rozkład dwumianowy (inaczej Bernoulliego) z parametrami $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{B}(n,p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- Jest to rozkład ilości sukcesów w n doświadczeniach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.
- $\mathcal{B}(1,p)$ nazywamy **rozkładem zerojedynkowym z parametrem p.**

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2 X = np(1-p)$.

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$
$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2 X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$
$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n, p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2 X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2 X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{n-1-l} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} = np(p+1-p)^{n-1} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$, to $\mathrm{E}X = np$ oraz $\mathrm{D}^2X = np(1-p)$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \mathrm{E}X + n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \mathrm{E}X + n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} =$$

$$= np + n(n-1)p^2 (p + 1 - p)^{n-2} =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \mathrm{E}X + n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} =$$

$$= np + n(n-1)p^2 (p + 1 - p)^{n-2} = np(1-p) + (np)^2 =$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \mathrm{E}X + n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} =$$

$$= np + n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = np(1-p) + (np)^2 =$$

$$= np(1-p) + (\mathrm{E}X)^2.$$

Zatem $\mathrm{D}^2 X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = np(1-p)$.

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$
$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

Funkcja charakterystyczna rozkładu Bernoulliego ma postać

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$

Funkcja charakterystyczna rozkładu Bernoulliego ma postać

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

Funkcja charakterystyczna rozkładu Bernoulliego ma postać

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} =$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu Bernoulliego ma postać

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

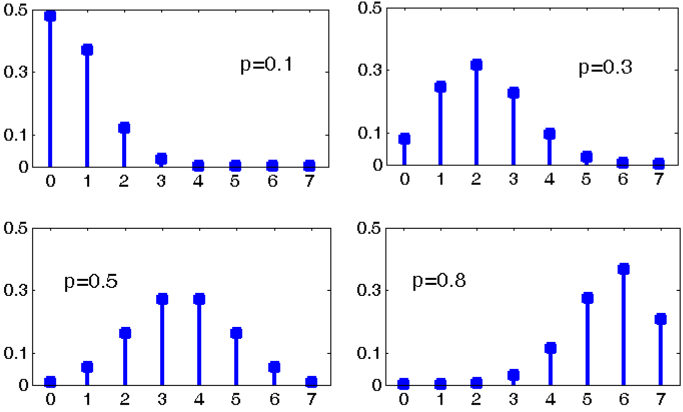
Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

Rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

$n = 7$



Rozkład ujemny dwumianowy (in. Pascala) z parametrami $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{NB}(m, p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$$

Rozkład ujemny dwumianowy (in. Pascala) z parametrami $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{NB}(m, p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$$

- Jest to rozkład czasu oczekiwania na m-ty sukces w ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

Blaise Pascal (1623-1662)

Rozkład ujemny dwumianowy (in. Pascala) z parametrami $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$; w skrócie $\mathcal{NB}(m, p)$

$$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$$

- Jest to rozkład czasu oczekiwania na m-ty sukces w ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.
- Wzór na p_k można uogólnić na dowolne $m > 0$. X nie ma wtedy interpretacji czasu oczekiwania na m-ty sukces. Nazwa „rozkład Pascala" odnosi się tylko do $m \in \mathbb{N}$.

Blaise Pascal (1623-1662)

Rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}(m,p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{NB}(m,p)$,
  to $\mathrm{E}X = \dfrac{m}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{m(1-p)}{p^2}$.

Rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}(m,p)$

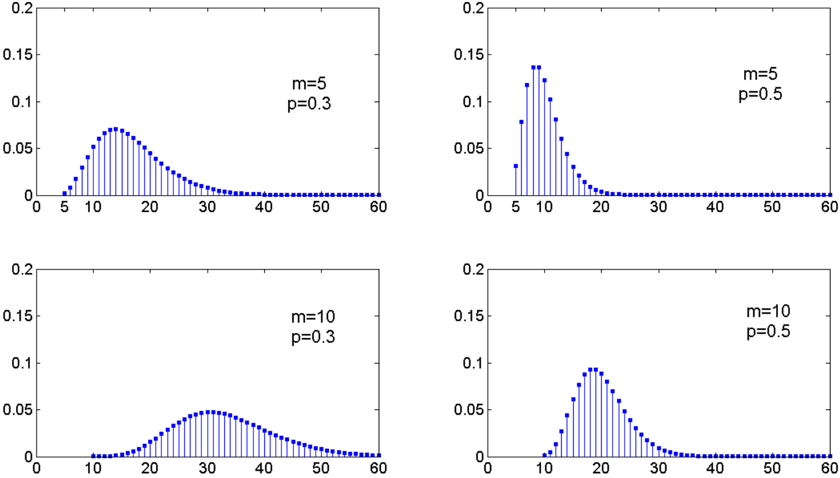
$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{NB}(m,p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{m}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{m(1-p)}{p^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} \right)^m .$$

Rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}(m, p)$

$x_k = k, \quad p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{dla} \quad k = m, m+1, \ldots$



Rozkład geometryczny z parametrem $0<p<1$; w skrócie $\mathcal{G}eo(p)$.

$$x_k = k, \quad p_k = p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Jest to rozkład czasu oczekiwania na pierwszy sukces w ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, czyli rozkład $\mathcal{NB}(1, p)$.

Rozkład geometryczny z parametrem $0<p<1$; w skrócie $\mathcal{G}eo(p)$.

$$x_k = k, \quad p_k = p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Jest to rozkład czasu oczekiwania na pierwszy sukces w ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, czyli rozkład $\mathcal{NB}(1,p)$.
- Rozkład ten ma **własność braku pamięci**:
  dla X o rozkładzie $\mathcal{G}eo(p)$

$$P(X > k+n | X > k) = P(X > n), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} =$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Zatem $P(X > k+n | X > k) = \dfrac{P(X > k+n)}{P(X > k)} =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Zatem $P(X > k+n | X > k) = \dfrac{P(X > k+n)}{P(X > k)} = \dfrac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^k} =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Zatem $P(X > k+n | X > k) = \dfrac{P(X > k+n)}{P(X > k)} = \dfrac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^k} =$

$$= (1-p)^n =$$

Dowód: $P(X > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i =$

$$= p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Zatem $P(X > k+n | X > k) = \dfrac{P(X > k+n)}{P(X > k)} = \dfrac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^k} =$

$$= (1-p)^n = P(X > n).$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} =$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} =$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} =$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2p(1-p)^{k-1} = p\frac{2-p}{p^3} =$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}eo(p)$, to $\mathrm{E}X = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ dla } |x| < 1.$$

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2p(1-p)^{k-1} = p\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

Zatem $\quad \mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$

ROZKŁAD GEOMETRYCZNY $\mathcal{G}eo(p)$ $x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^{k-1} =$

Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$
$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^{k-1} =$

$$= pe^{it} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)e^{it})^{k-1} =$$

ROZKŁAD GEOMETRYCZNY $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

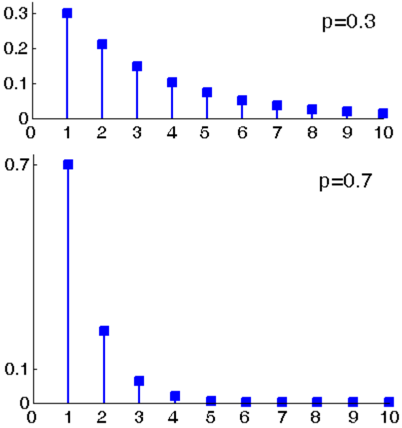
$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^{k-1} =$

$$= pe^{it} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)e^{it})^{k-1} = pe^{it} \frac{1}{1-(1-p)e^{it}}.$$

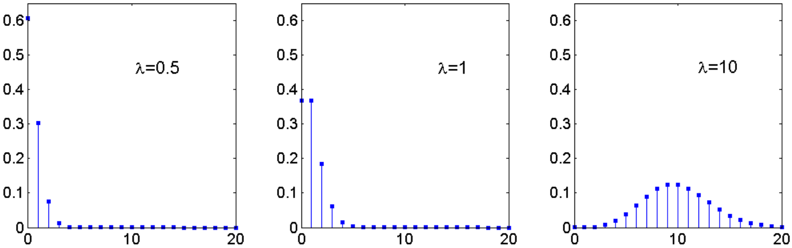
Rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(p)$

$x_k = k, \quad p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$



Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$; w skrócie $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$



Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} =$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$
$$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$, to $\mathrm{E}X = \lambda$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \lambda$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$

$$\mathrm{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$
$$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Zatem $\quad \mathrm{D}^2 X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$

$$x_k = k, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

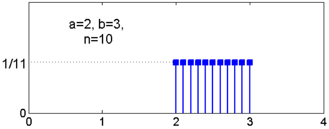
$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda e^{it}} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

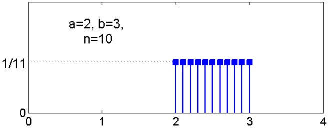
Rozkład jednostajny dyskretny na odcinku $[a,b]$ z parametrem $n \in \mathbb{N}$; w skrócie $\mathcal{DU}(a,b,n)$

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad p_k = \frac{1}{n+1} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$



Rozkład jednostajny dyskretny na odcinku $[a, b]$ z parametrem $n \in \mathbb{N}$; w skrócie $\mathcal{DU}(a, b, n)$

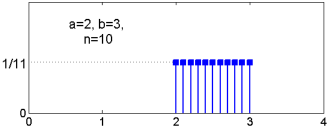
$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad p_k = \frac{1}{n+1} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$



- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{DU}(a, b, n)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Rozkład jednostajny dyskretny na odcinku $[a, b]$ z parametrem $n \in \mathbb{N}$; w skrócie $\mathcal{DU}(a, b, n)$

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad p_k = \frac{1}{n+1} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$



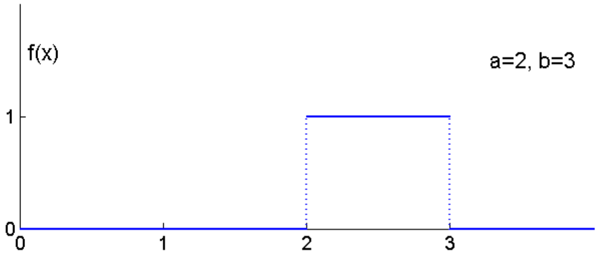
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{DU}(a, b, n)$,
  to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)\dfrac{(b-a)^2}{12}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{ita} - e^{itb}e^{it(b-a)/n}}{(n+1)(1-e^{it(b-a)/n})}.$$

Rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$; w skrócie $\mathcal{U}(a, b)$

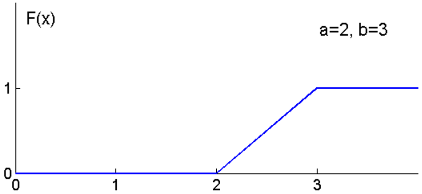
Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a, b]. \end{cases}$$



Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq a, \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{a}^{x} dt = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla} \quad a < x \leq b, \\ 1 & \text{dla} \quad x > b. \end{cases}$$



Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx =$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx =$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} =$

Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} xdx = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{b^2-a^2}{2} = \dfrac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b xdx = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{b^2-a^2}{2} = \dfrac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

ROZKŁAD JEDNOSTAJNY $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Zatem $\mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 =$

Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{D}^2X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dowód: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$\mathrm{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Zatem $\mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx =$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \dfrac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} e^{itx} dx =$

Rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \dfrac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} e^{itx} dx =$

$$= \frac{1}{b-a} \left. \frac{e^{itx}}{it} \right|_{a}^{b} =$$

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Dowód: $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} e^{itx} dx =$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{e^{itx}}{it}\Big|_a^b = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

ROZKŁAD JEDNOSTAJNY $\mathcal{U}(a,b)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a,b]. \end{cases}$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Dowód:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} < y\right) =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Dowód:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} < y\right) = P(X < (b-a)y + a) =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Dowód:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} < y\right) = P(X < (b-a)y + a) = F_X((b-a)y+a) =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Dowód:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} < y\right) = P(X < (b-a)y+a) = F_X((b-a)y+a) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (b-a)y+a \leq a, \\ \dfrac{(b-a)y+a-a}{b-a} & \text{dla} \quad a < (b-a)y+a \leq b, \\ 1 & \text{dla} \quad (b-a)y+a > b \end{cases} =$$

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{U}(a,b)$, to $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$.

Dowód:

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} < y\right) = P(X < (b-a)y+a) = F_X((b-a)y+a) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (b-a)y+a \le a, \\ \dfrac{(b-a)y+a-a}{b-a} & \text{dla} \quad a < (b-a)y+a \le b, \\ 1 & \text{dla} \quad (b-a)y+a > b \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y \le 0, \\ y & \text{dla} \quad 0 < y \le 1, \\ 1 & \text{dla} \quad y > 1 \end{cases}$$ - dystrybuanta rozkładu $\mathcal{U}(0,1)$.

Rozkład normalny z parametrami $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$; w skrócie $\mathcal{N}(m, \sigma)$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Rozkład ten nazywany jest także rozkładem Gaussa lub gaussowskim.

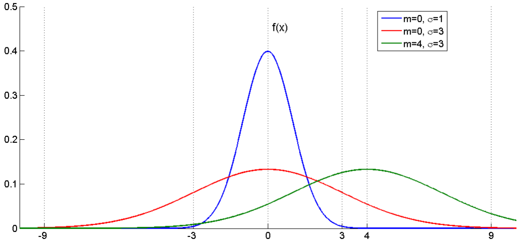
Rozkład normalny z parametrami $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$; w skrócie $\mathcal{N}(m, \sigma)$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Rozkład ten nazywany jest także rozkładem Gaussa lub gaussowskim.

Jest to rozkład o gęstości

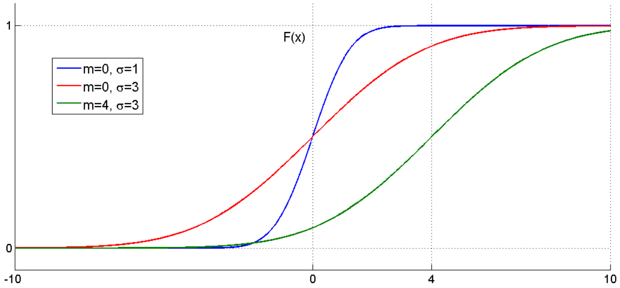
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Rozkład normalny $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Dystrybuanta tego rozkładu ma postać całkową

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$



Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) =$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) =$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Zatem $f_Y(y) = \sigma F_X'(\sigma y + m) =$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Zatem $f_Y(y) = \sigma F_X'(\sigma y + m) = \sigma f_X(\sigma y + m) =$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Zatem $f_Y(y) = \sigma F_X'(\sigma y + m) = \sigma f_X(\sigma y + m) =$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + m - m)^2}{2\sigma^2}} =$$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Zatem $f_Y(y) = \sigma F_X'(\sigma y + m) = \sigma f_X(\sigma y + m) =$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + m - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zwany **standardowym rozkładem normalnym**.

Dowód: $F_Y(y) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$.

Zatem $f_Y(y) = \sigma F'_X(\sigma y + m) = \sigma f_X(\sigma y + m) =$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + m - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ - to gęstość rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

- Dystrybuantę rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$ oznaczamy zwykle $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Dystrybuantę rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$ oznaczamy zwykle $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Wartości $\Phi(x)$ dla $0 \leq x \leq 4,417$ znajdują się w tablicach.

STANDARDOWY ROZKŁAD NORMALNY $\mathcal{N}(0,1)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Dystrybuantę rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$ oznaczamy zwykle $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

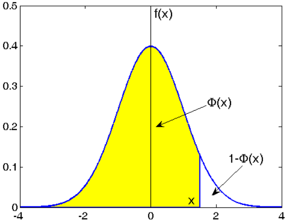
- Wartości $\Phi(x)$ dla $0 \leq x \leq 4,417$ znajdują się w tablicach.
- Dla $x > 4,417$ wartość $\Phi(x)$ to prawie 1.

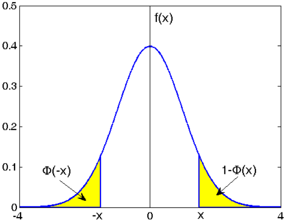
Standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Dystrybuantę rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$ oznaczamy zwykle $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

- Wartości $\Phi(x)$ dla $0 \leq x \leq 4,417$ znajdują się w tablicach.
- Dla $x > 4,417$ wartość $\Phi(x)$ to prawie 1.
- Natomiast dla $x < 0$ stosujemy wzór $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$





Rozkład normalny $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \sigma^2$.

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \sigma^2$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Rozkład normalny $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2X = \sigma^2$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

- **Reguła trzech sigm**:

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \cong 0,99$$

Rozkład normalny $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \sigma^2$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

- **Reguła trzech sigm**:

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \cong 0,99$$

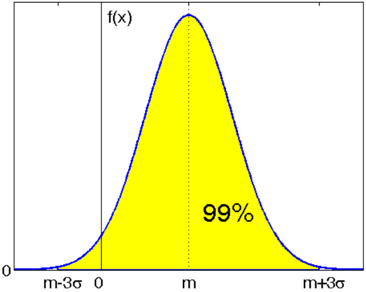
Rozkład normalny $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \sigma^2$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

- **Reguła trzech sigm**:

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \cong 0,99$$



Rozkład Laplace'a z parametrami $m \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$; w skrócie $\mathcal{L}(m, \lambda)$

Rozkład ten nazywany jest także rozkładem podwójnie wykładniczym.

Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

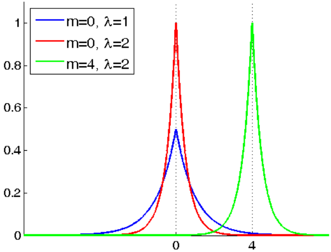
Rozkład Laplace'a z parametrami $m \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$; w skrócie $\mathcal{L}(m, \lambda)$

Rozkład ten nazywany jest także rozkładem podwójnie wykładniczym.

Jest to rozkład o gęstości

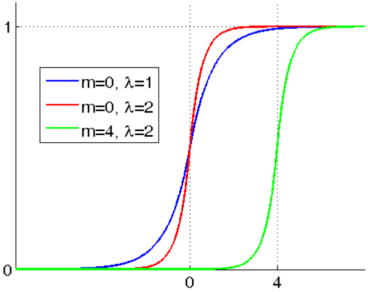
$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}$$

Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)



Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-m)} & \text{dla} \quad x \leq m, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-m)} & \text{dla} \quad x > m. \end{cases}$$



Rozkład Laplace'a $\mathcal{L}(m, \lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

ROZKŁAD LAPLACE'A $\mathcal{L}(m, \lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{2}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itm}}{1 + (t/\lambda)^2}.$$

Rozkład Laplace'a $\mathcal{L}(m, \lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{2}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itm}}{1 + (t/\lambda)^2}.$$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\lambda(X - m)$ ma rozkład $\mathcal{L}(0, 1)$.

Rozkład Laplace'a $\mathcal{L}(m, \lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\mathrm{E}X = m$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{2}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itm}}{1 + (t/\lambda)^2}.$$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{L}(m, \lambda)$, to $\lambda(X - m)$ ma rozkład $\mathcal{L}(0, 1)$.
- Podobnie jak dla rozkładu normalnego zachodzi reguła trzech sigm:

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \cong 0,985,$$

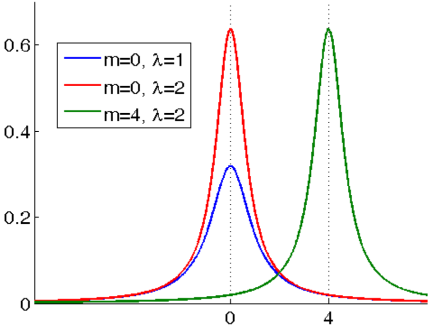
gdzie $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2 X}$.

Rozkład Cauchy'ego z parametrami $m \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$; w skrócie $\mathcal{C}(m, \lambda)$

Augustin Cauchy (1789-1857)

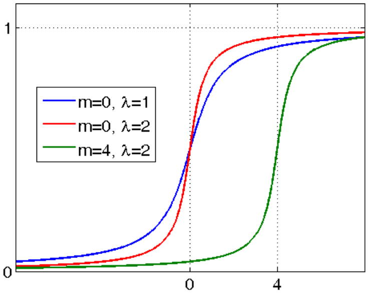
Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (\lambda(x - m))^2}$$



Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(\lambda(x-m))+\frac{1}{2}$$



Rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(m, \lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (\lambda(x-m))^2}$

- Rozkład Cauchy'ego ma **ciężkie ogony**:

  Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{C}(m, \lambda)$, to przy $x \to \infty$

$$P(X \geq x) \sim P(X \leq -x) \sim (\lambda \pi x)^{-1}.$$

- Rozkład Cauchy'ego ma **ciężkie ogony**:

  Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{C}(m,\lambda)$, to przy $x \to \infty$

$$P(X \geq x) \sim P(X \leq -x) \sim (\lambda \pi x)^{-1}.$$

- Zatem $\mathrm{E}X$, a w konsekwencji $\mathrm{D}^2 X$, nie istnieją.

- Rozkład Cauchy'ego ma **ciężkie ogony**:

  Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{C}(m, \lambda)$, to przy $x \to \infty$

$$P(X \geq x) \sim P(X \leq -x) \sim (\lambda \pi x)^{-1}.$$

- Zatem $\mathrm{E}X$, a w konsekwencji $\mathrm{D}^2 X$, nie istnieją.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - |t|/\lambda}$$

Rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(m,\lambda)$, $\quad f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(\lambda(x-m))^2}$

- Rozkład Cauchy'ego ma **ciężkie ogony**:

  Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{C}(m,\lambda)$, to przy $x \to \infty$

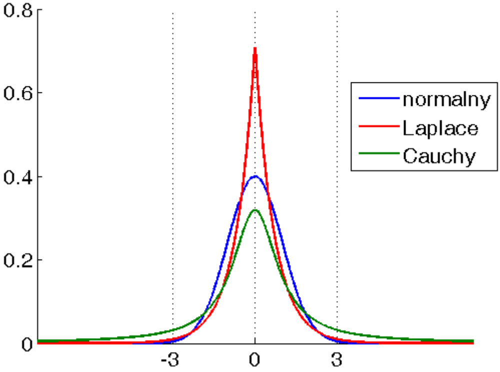
$$P(X \geq x) \sim P(X \leq -x) \sim (\lambda \pi x)^{-1}.$$

- Zatem $\mathrm{E}X$, a w konsekwencji $\mathrm{D}^2 X$, nie istnieją.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = e^{itm - |t|/\lambda}$$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{C}(m,\lambda)$, to $\lambda(X-m)$ ma rozkład $\mathcal{C}(0,1)$.

Porównanie rozkładów normalnego $\mathcal{N}(0,1)$, Laplace'a $\mathcal{L}(0,\sqrt{2})$ i Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$

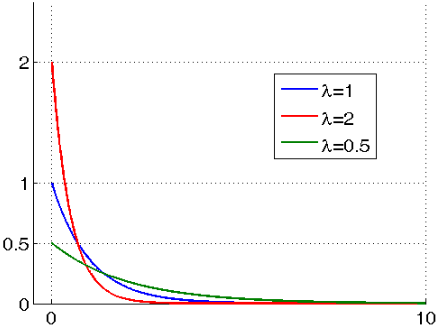


(parametry rozkładu Laplace'a dobrane są tak, aby jego wariancja była równa 1, jak dla badanego rozkładu normalnego)

Rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$; w skrócie $\mathcal{E}xp(\lambda)$

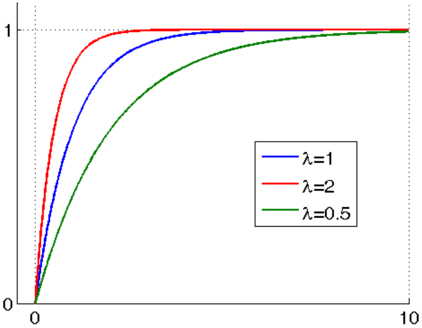
Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$



Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$



- Rozkład ten ma **własność braku pamięci**:
  dla X ma rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda)$

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x, y > 0.$$

- Rozkład ten ma **własność braku pamięci**:
  dla X ma rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda)$

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x, y > 0.$$

- $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{1}{\lambda^2}$.

Rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$

- Rozkład ten ma **własność braku pamięci**:
  dla X ma rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda)$

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x, y > 0.$$

- $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \frac{1}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - it/\lambda}$$

Rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$

- Rozkład ten ma **własność braku pamięci**:
  dla X ma rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda)$

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x, y > 0.$$

- $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - it/\lambda}$$

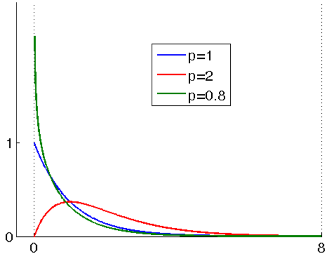
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{E}xp(\lambda)$, to λX ma rozkład $\mathcal{E}xp(1)$.

Rozkład gamma z parametrem skali $\lambda > 0$ i parametrem kształtu $p > 0$; w skrócie $\mathcal{G}(\lambda, p)$

Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$$

gdzie $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ nazywana jest funkcją gamma.



Funkcja gamma $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

Funkcja gamma $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

FUNKCJA GAMMA $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
- stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$

Funkcja gamma $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
- stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi$ dla $0 < p < 1$

FUNKCJA GAMMA $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
- stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi$ dla $0 < p < 1$
- stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Funkcja gamma $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
- stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi$ dla $0 < p < 1$
- stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Funkcja gamma $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Funkcja gamma ma następujące własności:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
- stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi$ dla $0 < p < 1$
- stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Funkcję

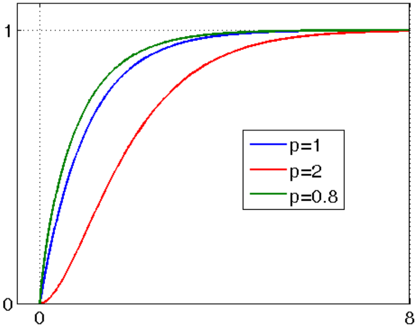
$$\Gamma(p; x) = \int\limits_0^x t^{p-1} e^{-t} dt$$

nazywamy niekompletną funkcją gamma.

Rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\Gamma(p; \lambda x)}{\Gamma(p)} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$



ROZKŁAD GAMMA $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0, \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}(\lambda, p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{p}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{p}{\lambda^2}$.

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}(\lambda, p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{p}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{p}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1 - it/\lambda)^p}$$

Rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}(\lambda, p)$, to $\mathrm{E}X = \dfrac{p}{\lambda}$ oraz $\mathrm{D}^2 X = \dfrac{p}{\lambda^2}$.
- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1 - it/\lambda)^p}$$

- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}(\lambda, p)$, to λX ma rozkład $\mathcal{G}(1, p)$.

Rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

- $\mathcal{G}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

Rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

- $\mathcal{G}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
- $\mathcal{G}(\lambda, n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy **rozkładem Erlanga**.

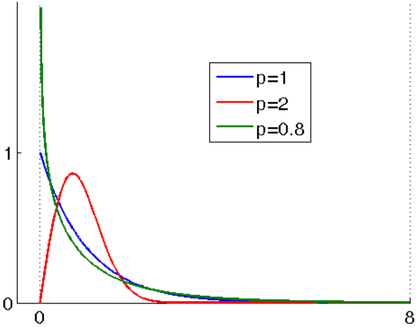
Rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p)$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

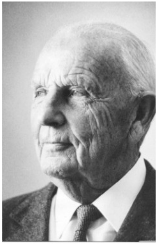
- $\mathcal{G}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
- $\mathcal{G}(\lambda, n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy **rozkładem Erlanga**.
- $\mathcal{G}(1/2, n/2)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy **rozkładem chi kwadrat z n stopniami swobody**; w skrócie $\chi^2(n)$.

Rozkład Weibulla z parametrem skali $\lambda > 0$ i parametrem kształtu $p > 0$; w skrócie $\mathcal{W}(\lambda, p)$

Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda p(\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$





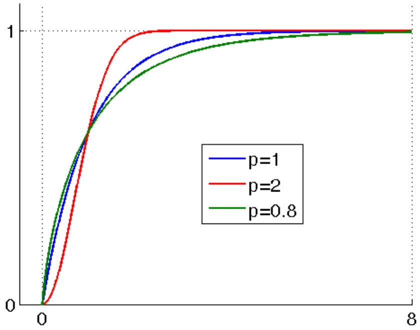
Waloddi Weibull 1887-1979
Photo by Sam C. Saunders

Rozkład Weibulla $\mathcal{W}(\lambda, p)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda p(\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ 1 - e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$



Rozkład Weibulla $\mathcal{W}(\lambda, p)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0, \\ \lambda p (\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{W}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

Rozkład Weibulla $\mathcal{W}(\lambda, p)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda p(\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{W}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{W}(\lambda, p)$, to

$$\mathrm{E}X = \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{D}^2 X = \frac{\Gamma(1 + 2/p) - \Gamma^2(1 + 1/p)}{\lambda^2}$$

Rozkład Weibulla $\mathcal{W}(\lambda, p)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0, \\ \lambda p(\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{W}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{W}(\lambda, p)$, to

$$\mathrm{E}X = \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{D}^2 X = \frac{\Gamma(1 + 2/p) - \Gamma^2(1 + 1/p)}{\lambda^2}$$

- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu nie ma na ogół jawnej postaci.

Rozkład Weibulla $\mathcal{W}(\lambda, p)$,

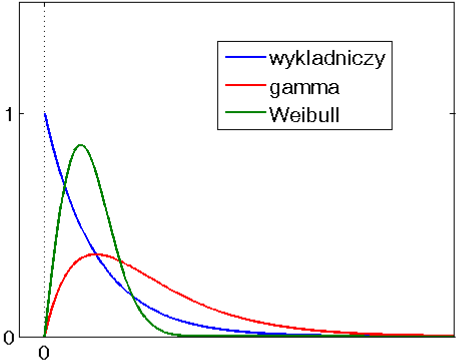
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \lambda p(\lambda x)^{p-1} e^{-(\lambda x)^p} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{W}(\lambda, 1)$ to rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{W}(\lambda, p)$, to

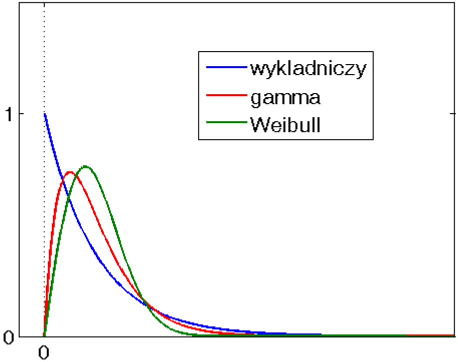
$$\mathrm{E}X = \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{D}^2 X = \frac{\Gamma(1 + 2/p) - \Gamma^2(1 + 1/p)}{\lambda^2}$$

- Funkcja charakterystyczna tego rozkładu nie ma na ogół jawnej postaci.
- Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{W}(\lambda, p)$, to λX ma rozkład $\mathcal{W}(1, p)$.

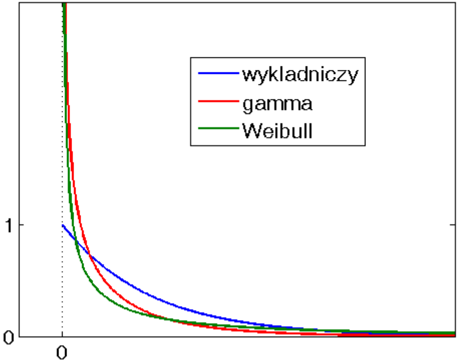
Porównanie rozkładów wykładniczego $\mathcal{E}xp(1)$, gamma $\mathcal{G}(1,2)$ i Weibulla $\mathcal{W}(1,2)$



Porównanie rozkładów wykładniczego $\mathcal{E}xp(1)$, gamma $\mathcal{G}(2,2)$ i Weibulla $\mathcal{W}(\Gamma(1.5),2)$ o tej samej średniej 1



Porównanie rozkładów wykładniczego $\mathcal{E}xp(1)$, gamma $\mathcal{G}(1, 0.5)$ i Weibulla $\mathcal{W}(1, 0.5)$



PORÓWNANIE ROZKŁADÓW WYKŁADNICZEGO $\mathcal{E}xp(1)$, GAMMA $\mathcal{G}(0.5, 0.5)$ I WEIBULLA $\mathcal{W}(2, 0.5)$ O TEJ SAMEJ ŚREDNIEJ 1