# Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

## Przykłady 1. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo klasyczne. Prawdopodobieństwo geometryczne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

**Przykłady 1.1: przestrzeń probabilistyczna o skończonej liczbie stanów**:

(a) W urnie znajdują się 3 kule białe i 4 kolorowe. Wybieramy losowo jednocześnie trzy kule. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą tę sytuację. Niech $A$ oznacza zdarzenie, że wylosowano 2 kule kolorowe i jedną białą, a $B$ – zdarzenie, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna kolorowa. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A$ i $B$.

- $\Omega = \{\{k_1, k_2, k_3\}$, gdzie $k_i$ to różne kule spośród 7 możliwych$\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$- prawdopodobieństwo klasyczne.
- $A = \{\{k_1, k_2, k_3\} \in \Omega$, gdzie wśród $k_i$ są dwie kolorowe i jedna biała$\}$
- $B = \{\{k_1, k_2, k_3\} \in \Omega$, gdzie wsród $k_i$ przynajmniej jedna jest kolorowa$\}$

  Zauważmy, że $B^c = \{\{k_1, k_2, k_3\} \in \Omega$, gdzie wśród $k_i$ brak kolorowej$\}$ =
  = $\{\{k_1, k_2, k_3\} \in \Omega$, gdzie $k_i$ to różne kule białe$\}$
- $\#\Omega = \binom{7}{3} = 35$
- $\#A = \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 18$
- Zatem $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{18}{35} \approx 0.5143$,
- $\#B^c = \binom{3}{3} = 1$
- Zatem $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \dfrac{\#B^c}{\#\Omega} = 1 - \dfrac{1}{35} = \dfrac{34}{35} \approx 0.9714$

(b) Przy dwukrotnym rzucie monetą zaobserwowano, że konfiguracja $OR$ (tzn. „orzeł” w jednym z rzutów, „reszka” w drugim) pojawia się w $\frac{1}{3}$ przypadków. Czy moneta, którą wykonywano rzut, jest symetryczna?

Można tu budować różne modele. Np.

**A** Przyjmujemy $\Omega = \{OO, OR, RR\}$ (kolejność wyników nieistotna), $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$ - prawdopodobieństwo klasyczne.
Wtedy $p_1 = P\{OO\} = \dfrac{1}{3}$, $p_2 = P\{OR\} = \dfrac{1}{3}$, $p_3 = P\{RR\} = \dfrac{1}{3}$.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi tu $\dfrac{1}{3}$.

**B** Przyjmujemy $\Omega = \{$dwa wyniki jednakowe, dwa wyniki różne$\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$ - prawdopodobieństwo klasyczne.
Wtedy $p_1 = P\{\text{dwa wyniki jednakowe}\} = \dfrac{1}{2}$,
$p_2 = P\{\text{dwa wyniki różne}\} = \dfrac{1}{2}$.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi tu $\dfrac{1}{2}$.

**C** Przyjmujemy $\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\}$ (kolejność wyników istotna), $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$ - prawdopodobieństwo klasyczne.
Wtedy $p_1 = P\{(O,O)\} = \frac{1}{4}$, $p_2 = P\{(O,R)\} = \frac{1}{4}$,
$p_3 = P\{(R,O)\} = \frac{1}{4}$, $p_4 = P\{(R,R)\} = \frac{1}{4}$.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi tu $\frac{1}{2}$.

**D** Przyjmujemy $\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,
$P$ takie, że $p_1 = P\{(O,O)\} = \frac{1}{3}$, $p_2 = P\{(O,R)\} = \frac{1}{6}$,
$p_3 = P\{(R,O)\} = \frac{1}{6}$, $p_4 = P\{(R,R)\} = \frac{1}{3}$.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi tu $\frac{1}{3}$.

**E** Interesuje nas jednak najbardziej model uwzględniający budowę monety.

- Przyjmujemy $\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$.
- Oznaczmy $p_1 = P\{(O,O)\}$, $p_2 = P\{(O,R)\}$, $p_3 = P\{(R,O)\}$, $p_4 = P\{(R,R)\}$.
- Niech $p$ oznacza szansę na wyrzucenie „orła”, $0 < p < 1$. Wtedy $1-p$ ta szansa na „reszkę”. Moneta jest symetryczna, gdy $p = 0,5$.
- Rzuty są niezależne, więc przyjmijmy
  $p_1 = p^2$, $p_2 = p_3 = p(1-p)$, $p_4 = (1-p)^2$.
  **Spr.** $p_i \geqslant 0$ dla $i = 1,2,3,4$ oraz $\sum_{i=1}^{4} p_i = p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 = (p+1-p)^2 = 1$.
- W takim modelu prawdopodobieństwo konfiguracji OR wynosi

$$P(OR) = P((O,R),(R,O)) = p_2 + p_3 = 2p(1-p).$$

- Szukamy takiego $p$, dla którego $P(OR) = 1/3$.
- Rozwiązujemy zatem równanie $2p(1-p) = 1/3$, czyli równanie kwadratowe

$$6p^2 - 6p + 1 = 0.$$

- Otrzymujemy $\Delta = 12$, $p = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0,21$ lub $\frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0,79$.
- (Zauważmy, że wartości $p$ sumują się do 1. Nie ma w tym nic dziwnego. Wynika to z symetrycznej roli „orła” i „reszki” w modelu i badanym zdarzeniu.)
- W obu przypadkach $p \neq 0,5$, zatem w ramach modelu wnioskujemy, że moneta nie jest symetryczna.

(c) Hasło potrzebne do uzyskania połączenia w sieci komputerowej składa się z jednej cyfry i następnie pięciu dużych liter alfabetu angielskiego. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą tę sytuację. Znajdź prawdopodobieństwo, że osoba postronna odgadnie hasło, jeśli wiadomo, że cyfra jest nieparzysta, a wśród liter są dokładnie trzy litery E.

- $\Omega = \{(c, l_1, \ldots, l_5)$, gdzie $c \in \{1,3,5,7,9\}$, $l_i$ to duże litery, dokładnie 3 wśród nich to E$\}$,
  $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$- prawdopodobieństwo klasyczne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- $\#\Omega = 5 \cdot \binom{5}{3} \cdot (25)^2 = 31250$,
  bo jest 5 możliwości wyboru cyfry, $\binom{5}{3}$ możliwości wyboru miejsc na E,
  $(26-1)^2$ możliwości wyboru liter innych niż E na każde z dwóch pozostałych miejsc
- zdarzenie, że osoba postronna odgadnie hasło, $A = \{\text{właściwe hasło}\}$, $\#A = 1$
- $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{1}{31250} \approx 0,000032.$

(d) Użytkownik karty kredytowej używa czterocyfrowego hasła dostępu. Bankomat blokuje kartę, gdy po raz trzeci hasło zostanie nieprawidłowo podane. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej karty dostanie się na nasze konto nie znając hasła? W rozwiązaniu określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą badaną sytuację.

- $\Omega = \{\{h_1, h_2, h_3\}$, gdzie $h_i$ to trzy różne hasła spośród $10^4$ możliwych haseł$\}$.
  $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P$- prawdopodobieństwo klasyczne.
- $A = \{\text{dostęp do konta}\} = \{\{\text{właściwe hasło}, h_2, h_3\}\}$
- $\#\Omega = \binom{10^4}{3}$, $\#A = \binom{10^4-1}{2}$.
- $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{(10^4-1)!}{2!(10^4-3)!} \cdot \dfrac{3!(10^4-3)!}{(10^4)!} = 0,0003.$

**Przykłady $\boxed{1.2}$: przestrzeń probabilistyczna o nieskończonej przeliczalnej liczbie stanów**:

(a) Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie dwa razy pod rząd na tę samą stronę. Określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ odpowiadające temu eksperymentowi dla monety symetrycznej. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonamy mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty.

- $\Omega = \{OO, ROO, OROO, \ldots\} \cup \{RR, ORR, RORR, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,
  $p_{n,O} = P(n \text{ rzutów} + OO) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$, $p_{n,R} = P(n \text{ rzutów} + RR) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
  dla monety symetrycznej.
- Przestrzeń probabilistyczna jest dobrze określona, bo $p_{n,O}, p_{n,R} \geqslant 0$ dla dowolnego $n$ oraz
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(p_{n,O} + p_{n,R}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$
- $P(\text{mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty}) = P(\text{ 3, 4, 5 lub 6 rzutów}) = \sum\limits_{n=1}^{4}(p_{n,O} + p_{n,R}) = \dfrac{15}{32}$
  (ilość rzutów$= n+2$).

(b) Niech $\Omega = \{\omega_n, n = 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Weźmy ciąg $p_n = cz^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $z > 1$ jest ustalone. Dobierz stałą $c$ tak, aby ciąg $(p_n)$ określał prawdopodobieństwo $P$ na zbiorze $\Omega$ tak, że $p_n = P(\{\omega_n\})$. Obliczyć $P(\{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\})$.

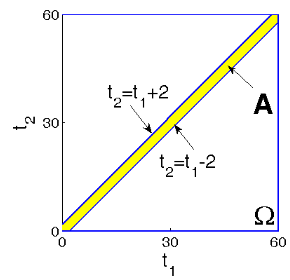
- $p_n \geqslant 0$ dla każdego $n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \geqslant 0$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = c \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{c}{z-1} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = z - 1 \geqslant 0$
- Oba warunki na ciąg określający prawdopodobieństwo na $\Omega$ są spełnione
  dla $c = z - 1$
- $P(\{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\}) = \sum\limits_{n=1}^{10} p_n = \sum\limits_{n=1}^{10}(z-1)\left(\frac{1}{z}\right)^n = (z-1) \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{z}\right)^{10}}{1-\frac{1}{z}} = 1 - \left(\dfrac{1}{z}\right)^{10}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

**Przykłady 2.3: przestrzeń probabilistyczna o nieprzeliczalnej liczbie stanów z prawdopodobieństwem geometrycznym**:

(a) W przypadkowych chwilach z przedziału czasu $[0,60]$ minut mogą nadejść do odbiornika dwa sygnały. Odbiornik zostaje uszkodzony, jeśli różnica w czasie między tymi dwoma sygnałami jest mniejsza od 2 minut. Oblicz prawdopodobieństwo uszkodzenia odbiornika. W rozwiązaniu określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą badaną sytuację.

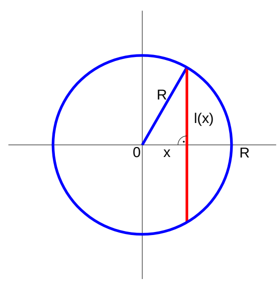
- $\Omega = \{(t_1, t_2) : t_1, t_2 \in [0,60]\}$, $\mathcal{F}$ to borelowskie podzbiory $\Omega$, $P$ - prawdopod. geometryczne.
- $A$ - zdarzenie, że odbiornik został uszkodzony. $A = \{(t_1,t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| < 2\}$




- $P(A) = \dfrac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega} = \dfrac{60^2 - 58^2}{60^2} \approx 0,0655.$

(b) Na okręgu wybieramy „losowo” cięciwę. Uściślić na kilka sposobów pojęcie „losowo” i dla każdego z nich obliczyć prawdopodobieństwo, że długość cięciwy będzie większa od promienia okręgu.

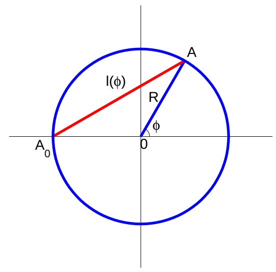
1. sposób Ustalamy kierunek i wybieramy spośród cięciw o tym samym kierunku od średnicy do cięciwy „zerowej”, przy czym nie wyróżniamy żadnej z nich. Odpowiada to jednostajnemu wyborowi punktu $x$ z odcinka $[0,R]$, gdzie $R$ to promień okręgu.




- $\Omega = [0,R]$, $\mathcal{F}$ to rodzina zbiorów borelowskich z tego odcinka,
  $P$ to prawdopodobieństwo geometryczne.
- Dla wybranego $x$ długość odpowiadajęcej mu cięciwy wynosi $l(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$
- $l(x) > R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in [0, \sqrt{3}R/2)$.
- Zatem $P(l(x) > R) = P([0, \sqrt{3}R/2)) = \dfrac{\sqrt{3}R/2}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

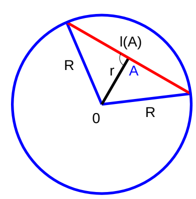
Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

2. sposób Ustalamy punkt $A_0$ na okręgu i wybieramy spośród cięciw o punkcie początkowym $A_0$, przy czym nie wyróżniamy żadnej z nich. Odpowiada to jednostajnemu wyborowi punktu $A$ (końcowego punktu cięciwy) z okręgu, albo równoważnie wyborowi kąta $\varphi$ z przedziału $[-\pi, \pi]$, patrz rysunek.




- $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\mathcal{F}$ to rodzina zbiorów borelowskich z tego odcinka,
  $P$ to prawdopodobieństwo geometryczne.
- Dla wybranego $\varphi$ długość odpowiadającej mu cięciwy wynosi $l(\varphi) = 2\sqrt{2R^2(1 + \cos\varphi)}$.
- $l(\varphi) > R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in (-2\pi/3, 2\pi/3)$.
- Zatem $P(l(\varphi) > R) = P((-2\pi/3, 2\pi/3)) = \dfrac{2 \cdot 2\pi/3}{2\pi} = \dfrac{2}{3}$.

3. sposób Wybieramy bez wyróżniania punkt $A$ z koła bez środka. Punkt ten potraktowany jako środek cięciwy jednoznacznie ją wyznacza (wyjątkiem byłby środek koła odpowiadający średnicom, odrzucając środek koła na początku przyjęliśmy, że prawdopodobieństwo wylosowania średnicy wynosi 0).

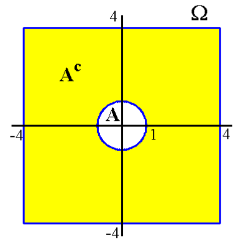



- $\Omega =$koło o promieniu $R$, $\mathcal{F}$ to rodzina zbiorów borelowskich na tym kole,
  $P$ to prawdopodobieństwo geometryczne.
- Dla wybranego $A$ długość odpowiadającej mu cięciwy wynosi $l(A) = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, gdzie $r$ to odległość punktu $A$ od środka koła.
- $l(A) > R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r < \sqrt{3}R/2$, tzn. gdy $A$ leży w otwartym kole $K(A)$ o tym samym środku co $\Omega$ i promieniu $\sqrt{3}R/2$.
- Zatem $P(l(A) > R) = P(K(A)) = \dfrac{\pi \cdot 3R^2/4}{\pi R^2} = \dfrac{3}{4}$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(c) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo punkt kwadratu $|x| < 4$, $|y| < 4$ leży na zewnątrz koła $x^2 + y^2 < 1$. W rozwiązaniu określ przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelującą badaną sytuację.

- $\Omega = \{(x, y) : |x| < 4, |y| < 4\}$ - kwadrat, $\mathcal{F}$ to borelowskie podzbiory $\Omega$,
  $P$ - prawdopod. geometryczne.
- $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ - koło.
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega} = 1 - \dfrac{\pi}{64} \approx 0,951.$




Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz