Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Przykłady 2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa. Niezależność zdarzeń.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 2.1: twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayesa.:

(a) Prawdopodobieństwo trafienia w cel w jednym strzale wynosi $1/2$, natomiast prawdopodobieństwo zniszczenia celu przy k trafieniach wynosi $1-\left(\frac{1}{3}\right)^k$, $k=0,1,\ldots$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zniszczenia celu przy oddaniu 10 strzałów.

- Wprowadzamy oznaczenia:
  A - zdarzenie, że zniszczono cel przy oddaniu 10 strzałów,
  B_k - zdarzenie, że w 10 strzałach jest k trafień, $k=0,1,\ldots,10$.
- $B_0, B_1, \ldots, B_{10}$ stanowią rozbicie przestrzeni probabilistycznej (są parami rozłączne i w sumie są zdarzeniem pewnym Ω).
- Mamy $P(B_k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-k}=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $P(A|B_k)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^k$.
- Z tw. o prawdopodobieństwie całkowitym $P(A)=\sum\limits_{k=0}^{10}P(A|B_k)P(B_k)=\sum\limits_{k=0}^{10}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k)\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=$
  $=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\sum\limits_{k=0}^{10}\binom{10}{k}1^k1^{10-k}-\sum\limits_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k1^{10-k}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left((1+1)^{10}-\left(\frac{1}{3}+1\right)^{10}\right)=$
  $=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\approx 0.983,$

  gdzie korzystaliśmy ze wzoru $(a+b)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}a^kb^{10-k}$.

(b) Zakład pracuje na trzy zmiany. Zmiany produkują odpowiednio $n_1=200$, $n_2=n_3=150$ wyrobów, przy czym szansa wyprodukowania wadliwego wyrobu wynosi odpowiednio $p_1=p_2=0.1$, $p_3=0.3$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyrób wylosowany z całej produkcji jest wadliwy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowany wadliwy wyrób wyprodukowała druga zmiana.

- Wprowadzamy oznaczenia:
  A - zdarzenie, że wylosowany wyrób jest wadliwy;
  B_n - zdarzenie, że wylosowany wyrób wyprodukowała n-ta zmiana, $n=1,2,3$.
- Mamy $P(B_1)=\dfrac{n_1}{n_1+n_2+n_3}=\dfrac{200}{500}=0.4$; $P(B_2)=P(B_3)=0.3$;
  $P(A|B_1)=P(A|B_2)=0.1$; $P(A|B_3)=0.3$.
- Z tw. o prawdop. całkowitym
  $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=$
  $=0.1\cdot 0.4+0.1\cdot 0.3+0.3\cdot 0.3=0.16.$
- Szukamy teraz $P(B_2|A)$.
  Ze wzoru Bayesa $P(B_2|A)=\dfrac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.1\cdot 0.3}{0.16}=\dfrac{3}{16}=0.1875.$

(c) W pewnym teleturnieju za jednymi z trzech zamkniętych drzwi znajduje się samochód, a za pozostałymi dwoma kozy. Prowadzący grę wie, które drzwi kryją samochód. Gracz wskazuje na jedne z drzwi, prowadzący otwiera jedne z pozostałych odkrywając kozę i następnie pyta gracza, które z zamkniętych drzwi otworzyć (tzn. czy gracz zmienia wybór, czy nie). Jeżeli gracz wskaże na odpowiednie drzwi, wygrywa samochód.

Powiedzmy, że gracz wskazał na początku na drzwi nr 1, a prowadzący grę otworzył drzwi nr 3 z kozą. Czy graczowi opłaca się zmienić decyzję i wskazać na drzwi nr 2? Odpowiedź uzasadnić.

- Wprowadzamy oznaczenia: A_i - zdarzenie, że samochód jest za drzwiami nr i, B_i - zdarzenie, że prowadzący otworzył drzwi nr i, $i = 1, 2, 3$
- Mamy $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(B_3|A_2) = 1$, $P(B_3|A_3) = 0$.
- Stąd $P(B_3) = \sum_{i=1}^{3} P(B_3|A_i)P(A_i) = \frac{1}{2}$ z tw. o prawdop. całkowitym,
- i ze wzoru Bayesa $P(A_1|B_3) = \dfrac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \dfrac{1}{3}$.
- Ponieważ $P(A_3|B_3) = 0$ oraz $P(A_1|B_3) + P(A_2|B_3) + P(A_3|B_3) = P(\Omega|B_3) = 1$, mamy $P(A_2|B_3) = \frac{2}{3}$
- Wniosek: Graczowi opłaca się zmienić decyzję, bo zwiększa swoją szansę na wygraną ($P(A_1|B_3) \leqslant P(A_2|B_3)$).

(d) Pewna choroba jest obecna w 0.01% populacji. Opracowano test, który daje wynik dodatni u 90% chorych i u 5% zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem dodatnim jest zdrowy? Czy ma on powody do obaw?

- Wprowadzamy oznaczenia:
  A - zdarzenie, że test daje wynik dodatni; B - zdarzenie, że pacjent jest chory.
  Szukamy $P(B^c|A)$.
- Ze wzoru Bayesa $P(B^c|A) = \dfrac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)}$
- Mamy $P(B) = 0.0001 = 1 - P(B^c)$; $P(A|B) = 0.9$; $P(A|B^c) = 0.05$.
- Zatem $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.050085$ z tw. o prawdop. całkowitym.
- oraz $P(B^c|A) = \dfrac{0.05(1 - 0.0001)}{0.050085} \approx 0.9982$
- Wniosek: Test w istocie nie wykrywa choroby, bo pacjent z wynikiem dodatnim jest zdrowy na ponad 99% i raczej nie ma powodów do obaw.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 2.2: niezależność zdarzeń, lemat Borela-Cantelliego.:

(a) Weźmy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P określone ciągiem $p_i = P(\{\omega_i\})$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, gdzie $p_i \geqslant 0$, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Zbadajmy niezależność zdarzeń $A = \{\omega_i\}$ i $B = \{\omega_j\}$, a następnie niezależność zdarzeń $A_1 = \{\omega_1, \omega_3\}$ i $B_1 = \{\omega_2, \omega_3\}$.

- $P(A) = p_i, \quad P(B) = p_j, \quad P(A \cap B) = P(\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\}) = P(\emptyset) = 0$
- Zatem jeśli $p_i > 0$ oraz $p_j > 0$, to $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$
  i zdarzenia $\{\omega_i\}$ i $\{\omega_j\}$ nie są niezależne.
- $P(A_1) = p_1 + p_3, \quad P(B_1) = p_2 + p_3, \quad P(A_1 \cap B_1) = P(\{\omega_3\}) = p_3.$
- A_1 i B_1 są niezależne, gdy $p_3 = (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_3) \Leftrightarrow p_1 p_2 = p_3 p_4$.
- Gdy P to prawdopodobieństwo klasyczne, czyli $p_i = 0.25$ dla $i = 1, 2, 3, 4$,
  mamy $0.25 = (0.25 + 0.25) \cdot (0.25 + 0.25)$. Zatem wtedy A_1 i B_1 są niezależne
- Natomiast dla P takiego, że $p_1 = p_2 = p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.7$ mamy $0.1 \cdot 0.1 \neq 0.1 \cdot 0.7$.
  Zatem w takiej przestrzeni probabilistycznej zdarzenia A_1 i B_1 nie są niezależne.

(b) Dwa razy kontrolowana jest jakość pewnego urządzenia przez niezależne kontrole. Wynik kontroli to jedna z dwóch opinii: S - urządzenie sprawne lub N - urządzenie niesprawne. Szansa na to, że S będzie wynikiem pierwszej kontroli, wynosi p, drugiej kontroli - q, $0 \leqslant p, q \leqslant 1$. Zbadać niezależność zdarzenia A, że wynik pierwszej kontroli to S, oraz zdarzenia B, że obie kontrole stwierdziły to samo.

- $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,
  $P(SS) = pq$, $P(SN) = p(1-q)$, $P(NS) = (1-p)q$, $P(NN) = (1-p)(1-q)$,
  gdyż kontrole są niezależne.
- $A = \{SS, SN\}$, $B = \{SS, NN\}$, $A \cap B = \{SS\}$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $pq = (pq + p(1-q))(pq + (1-p)(1-q))$,
  czyli gdy $pq = p(1 - p - q + 2pq)$.
- Równość zachodzi dla $p = 0$ albo $p = 1$ albo $q = 1/2$.
- Zatem zdarzenia A i B są niezależne w skrajnych przypadkach $p = 0$ lub $p = 1$ bez względu na q oraz w ciekawszym przypadku $q = 1/2$ bez względu na p.

(c) Elektron emitowany jest w losowej chwili τ przedziału $[0, T]$. Dla ustalonej chwili t przedziału $(0, T)$ niech A będzie zdarzeniem, że emisja nastąpi po chwili t, a B zdarzeniem, że emisja nastąpi przed chwilą $T - t$. Czy zdarzenia A, B są niezależne?

- $\Omega = [0, T]$, $\mathcal{F}$ to zbiory borelowskie z tego odcinka,
  P to prawdopodobieństwo geometryczne.
- $A = [t, T]$, $B = [0, T - t]$
- $P(A) \cdot P(B) = \left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2.$
- $A \cap B = \begin{cases} \emptyset, & \text{gdy} \quad T - t < t, \\ \text{[t,T-t]}, & \text{gdy} \quad T - t \geqslant t; \end{cases}$ i stąd $P(A \cap B) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad T/2 < t < T, \\ \dfrac{T - 2t}{T}, & \text{gdy} \quad 0 < t \leqslant T/2. \end{cases}$
- Ponieważ $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, zdarzenia A i B nie są niezależne.
  (Zauważmy, że wniosek ten nie zależy od wyboru t.)

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(d) Prawdopodobieństwo zestrzelenia samolotu przez wystrzał z karabinu wynosi $p = 0.004$. Jakie jest prawdopodobieństwo zestrzelenia samolotu przez salwę z 250 karabinów?

- Wprowadzamy oznaczenia:
  $A_i = \{$zestrzelenie samolotu z i-tego karabinu $\}$, $i = 1, 2, \ldots, 250$,
  $B = \{$zestrzelenie samolotu przez salwę z 250 karabinów $\}$.
  Zakładamy, że zdarzenia A_i, $i = 1, 2, \ldots, 250$, są niezależne.
- $B = \bigcup\limits_{i=1}^{250} A_i$, a stąd $B^c = \bigcap\limits_{i=1}^{250} A_i^c$.
- Z niezależności $P(B^c) = \prod\limits_{i=1}^{250} P(A_i^c) = (1 - 0.004)^{250} \approx 0.3671$
- Stąd $P(B) = 1 - P(B^c) \approx 0.6329$

(e) Korzystając z lematu Borela-Cantelliego oblicz prawdopodobieństwo, że przy nieograniczonym w czasie rzucaniu monetą symetryczną wynik "reszka" pojawi się nieskończenie wiele razy.

- Wprowadzamy oznaczenia: $A_i = \{$"reszka" w i-tym rzucie$\}$, $i = 1, 2, \ldots$
  $A = \{$"reszka" nieskończenie wiele razy$\} = \{A_n \text{ i.o.}\} = \limsup_n A_n$
- $A_1, A_2, \ldots$ to zdarzenia niezależne.
- $P(A_i) = 0.5$ dla każdego i, więc szereg $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest rozbieżny.
- Z lematu Borela-Cantelliego otrzymujemy zatem, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $P(A) = 1$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz