Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Przykłady 3. Schemat Bernoulliego.
Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 3.1:

(a) Przy masowych prześwietleniach małoobrazkowych prawdopodobieństwo natrafienia na chorego na gruźlicę jest 0.01. Wyznacz prawdopodobieństwo, że wśród 20 ludzi prześwietlonych będzie co najmniej 2 chorych.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces-pacjent jest chory, $p = 0.01$, $n = 20$.
- Niech X oznacza liczbę chorych.
  $P(X = k) = \binom{20}{k}(0.01)^k(1 - 0.01)^{20-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, 20$.
- Mamy oszacować $P(X \geqslant 2)$.
  $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$
  $= 1 - \binom{20}{0}(0.01)^0(1 - 0.01)^{20-0} - \binom{20}{1}(0.01)^1(1 - 0.01)^{20-1} =$
  $= 1 - (0.99)^{20} - 20 \cdot 0.01 \cdot (0.99)^{19} \approx 0.0169$.

(b) Wiadomo, że 1% skrzynek pomarańczy psuje się w czasie transportu. Z transportu w sposób losowy pobiera się 10 skrzynek i transport ten jest odrzucany, gdy więcej niż 10% badanych skrzynek zawiera popsute owoce. Jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia transportu?

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces-wybranie skrzynki z popsutymi owocami,
  $p = 0.01$ (1%), $n = 10$.
- Niech X oznacza ilość skrzynek z popsutymi owocami wśród 10 badanych.
  $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.01)^k(1 - 0.01)^{10-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, 10$.
- Transport jest odrzucany, gdy $X > 10\% \cdot 10 = 1$.
  Prawdop. odrzucenia transportu wynosi zatem $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$
  $= 1 - \binom{10}{0}(0.01)^0(1 - 0.01)^{10} - \binom{10}{1}(0.01)^1(1 - 0.01)^9 \approx 0.0043$.

(c) Gra polega na zarzucaniu podków na kołek. Gracz otrzymuje sześć podków. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po pierwszym trafieniu zostanie graczowi jeszcze co najmniej jedna podkowa, jeżeli prawdopodobieństwo trafienia na kołek przy każdym rzucie wynosi 0.1.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces-trafienie na kołek, $p = 0.1$.
- Wyobraźmy sobie, że mamy nieograniczoną liczbę podków.
  Oznaczmy przez Y czas oczekiwania na pierwsze trafienie.
  $P(Y = k) = 0.1 \cdot (1 - 0.1)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$
- Graczowi zostanie po pierwszym trafieniu co najmniej jedna podkowa, gdy $Y \leqslant 5$.
- Szukane prawdopod. wynosi zatem
  $P(Y \leqslant 5) = \sum_{k=1}^{5} P(Y = k) = 0.1 \sum_{k=1}^{5} (0.9)^{k-1} = 1 - (0.9)^5 \approx 0.41$.