Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Przykłady 4. Zmienne losowe. Dystrybuanta.
Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 4.1:

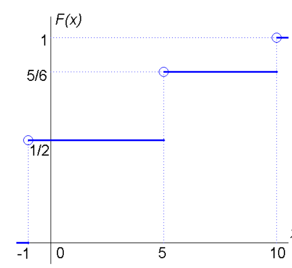
(a) Gracz rzuca symetryczna kostką do gry. Jeśli wyrzuci „piątkę”, wygrywa 10 zł. Jeśli wyrzuci liczbę podzielną przez 3, wygrywa 5 zł. W pozostałych przypadkach płaci 1 zł. Niech X oznacza wygraną gracza (przy czym przegrana 1 zł to inaczej wygrana -1 zł). Znajdź i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X. Oblicz $P(X > 0)$.

Rozwiązanie:

- X przyjmuje tylko trzy wartości: 10, 5 i -1, przy czym
  $P(X = 10) = 1/6$, $P(X = 5) = 2/6 = 1/3$,
  $P(X = -1) = 1 - P(X = 10) - P(X = 5) = 1 - 1/6 - 2/6 = 3/6 = 1/2$
  Dokładniej:
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P- prawdopodobieństwo klasyczne.
  $X(5) = 10, X(3) = X(6) = 5, X(1) = X(2) = X(4) = -1$
  $P(X = 10) = P(\{5\}) = 1/6$, $P(X = 5) = P(\{3, 6\}) = 2/6 = 1/3$,
  $P(X = -1) = P(\{1, 2, 4\}) = 1/2$

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ \{X = -1\} = \{1, 2, 4\} & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 5, \\ \{X = -1\} \cup \{X = 5\} = \{1, 2, 4, 3, 6\} & \text{dla} \quad 5 < x \leqslant 10, \\ \Omega & \text{dla} \quad x > 10 \end{cases}$.

- $F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ 1/2 & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 5, \\ 5/6 & \text{dla} \quad 5 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 10 \end{cases}$



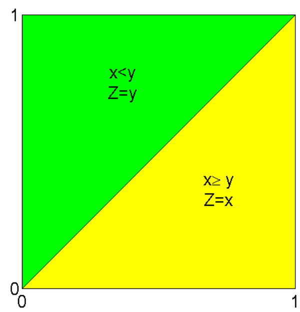
- $P(X > 0) = 1 - \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = 1 - 1/2 = 0.5.$

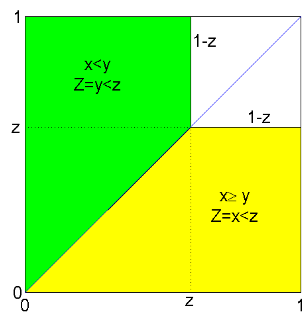
(b) Na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = \{\omega = (x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ z prawdopodobieństwem geometrycznym definiujemy zmienną losową:

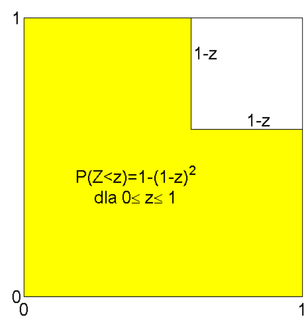
$$Z(\omega) = Z(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant y, \\ y & \text{dla} \quad x < y \end{cases}$$

Wyznacz i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej Z.

Rozwiązanie:

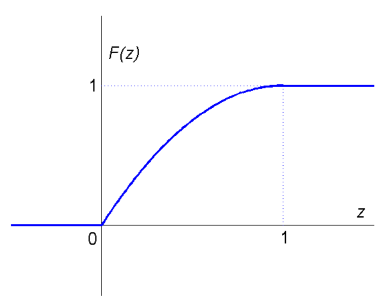






$$F(z) = P(Z < z) = P(\{(x, y) : x < z, 1 \geqslant x \geqslant y \geqslant 0\}) + P(\{(x, y) : y < z, 0 \leqslant x < y \leqslant 1\}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad z \leqslant 0, \\ 1 - (1 - z)^2 & \text{dla} \quad 0 < z \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad 1 < z \end{cases}$$

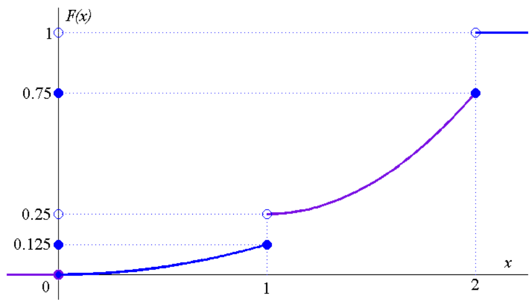


Przykłady 4.2:

(a) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 0.125x^2 & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0.5x^2 - x + 0.75 & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla} \quad 2 < x. \end{cases}$$

Narysuj $F(x)$ i oblicz $P(1 \leqslant X < 1.5)$, $P(1 < X \leqslant 1.5)$, $P(0 < X < 2)$, $P(0 < X \leqslant 2)$, $P(X > 1)$, $P(|X| > 0.5)$. * Uzasadnij, że funkcja F jest dystrybuantą pewnego rozkładu.
Rozwiązanie:



- Wykres $F(x)$:
- $P(1 \leqslant X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = (0.5 \cdot (1.5)^2 - 1.5 + 0.75) - 0.125 \cdot 1^2 = 0.25$
- $P(1 < X \leqslant 1.5) = \lim\limits_{x \to 1.5+} F(x) - \lim\limits_{x \to 1+} F(x) =$
  $= (0.5 \cdot (1.5)^2 - 1.5 + 0.75) - (0.5 \cdot 1^2 - 1 + 0.75) = 0.125$
- $P(0 < X < 2) = F(2) - \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = (0.5 \cdot 2^2 - 2 + 0.75) - 0 = 0.75$
- $P(0 < X \leqslant 2) = \lim\limits_{x \to 2+} F(x) - \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = 1 - 0 = 1$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \lim\limits_{x \to 1+} F(x) = 1 - (0.5 \cdot 1^2 - 1 + 0.75) = 0.75$
- $P(|X| > 0.5) = P(X < -0.5) + P(X > 0.5) = F(-0.5) + (1 - \lim\limits_{x \to 0.5+} F(x)) =$
  $= 0 + (1 - 0.125 \cdot (0.5)^2) = 0.96875$
- * $F(x)$ jest dystrybuantą pewnego rozkładu, ponieważ:
  (i) Funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła, bo jest zadana funkcjami elementarnymi na przedziałach domkniętych z prawej strony.
  (ii) Funkcja $F(x)$ jest niemalejąca na $\mathbb{R}$, bo
    - jest stała na $(-\infty, 0)$ i na $(2, \infty)$;
    - jest rosnąca na $(0, 1)$, ponieważ dla $x \in (0, 1)$ pochodna
      $F'(x) = (0.125x^2)' = 0.25x > 0$;
    - jest rosnąca na $(1, 2)$, ponieważ dla $x \in (1, 2)$ pochodna
      $F'(x) = (0.5x^2 - x + 0.75)' = x - 1 > 0$;
    - $F(0) = 0 = 0.125 \cdot 0^2 = \lim\limits_{x \to 0+} F(x)$;
    - $F(1) = 0.125 \cdot 1^2 = 0.125 \leqslant 0.25 = 0.5 \cdot 1^2 - 1 + 0.75 = \lim\limits_{x \to 1+} F(x)$;
    - $F(2) = 0.5 \cdot 2^2 - 2 + 0.75 = 0.75 \leqslant 1 = \lim\limits_{x \to 2+} F(x)$.

  (iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Przykłady 4.3:

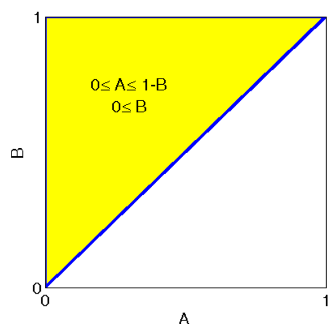
(a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ Ax^2 + B & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad 1 < x \end{cases}$$

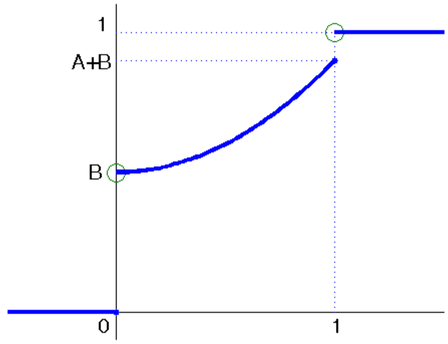
była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Następnie oblicz $P(-0.5 < X < 0.5)$, $P(0 < X < 1.5)$, $P(0 \leqslant X < 1.5)$, $P(X > 1)$, $P(X \geqslant 1)$.

Rozwiązanie:

- Dla wszystkich A i B funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła
- oraz $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
- Aby F była niemalejąca na całej prostej musimy mieć:
  - $A \geqslant 0$,
  - $0 \leqslant \lim_{x\to 0+} F(x)$,
  - $F(1) \leqslant 1$,
- co daje warunki $0 \leqslant B$, $0 \leqslant A \leqslant 1 - B$.



- Dla A i B spełniających te warunki funkcja F jest dystrybuantą.



- $P(-0.5 < X < 0.5) = F(0.5) - \lim_{x\to-0.5+} F(x) = F(0.5) - F(-0.5) = A(0.5)^2 + B - 0 = 0.25A + B$.
- $P(0 < X < 1.5) = F(1.5) - \lim_{x\to 0+} F(x) = 1 - B$
- $P(0 \leqslant X < 1.5) = F(1.5) - F(0) = 1 - 0 = 1$
- $P(X > 1) = 1 - \lim_{x\to 1+} F(x) = 1 - 1 = 0$
- $P(X \geqslant 1) = 1 - F(1) = 1 - (A + B)$

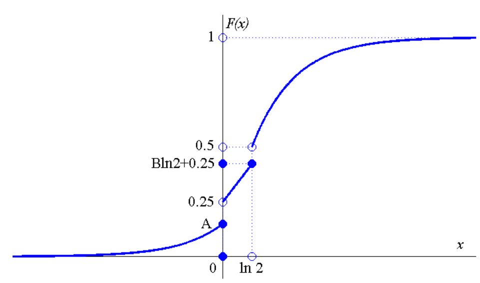
(b) Dobierz stałe A, B i C tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ Bx + 0.25 & \text{dla } 0 < x \leqslant \ln 2, \\ C - e^{-x} & \text{dla } x > \ln 2 \end{cases}$$

była dystrybuantą rozkładu pewnej zmiennej losowej X.
Oblicz następnie prawdopodobieństwa $P(X \leqslant \ln 2)$, $P(X > -\ln 3)$ i $P(0 < X < 1)$.
Rozwiązanie:

- Funkcja $F(x)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:
  (i) jest lewostronnie ciągła;
  (ii) jest niemalejąca;
  (iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
- W naszym przypadku $\lim_{x\to-\infty} F(x) = A \cdot 0 = 0$ dla wszystkich A, B i C,
  natomiast $\lim_{x\to\infty} F(x) = C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.
  Zatem warunek (iii) jest spełniony $\iff C = 1$, A i B - dowolne.
- Dla $C = 1$ i dowolnych A i B funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła, czyli warunek (i) jest spełniony, bo F jest zadana funkcjami elementarnymi na przedziałach domkniętych z prawej strony.
- Dla $C = 1$
  - dla $x < 0$ pochodna $F'(x) = (Ae^x)' = Ae^x \geqslant 0 \Leftrightarrow A \geqslant 0$ i funkcja $F(x)$ jest niemalejąca na $(-\infty, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \geqslant 0$;
  - dla $x \in (0, \ln 2)$ pochodna $F'(x) = (Bx + 0.25)' = B \geqslant 0 \Leftrightarrow B \geqslant 0$ i funkcja $F(x)$ jest niemalejąca na $(0, \ln 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \geqslant 0$;
  - dla $x > \ln 2$ pochodna $F'(x) = (1 - e^{-x})' = e^{-x} > 0$ i $F(x)$ jest rosnąca na $(\ln 2, \infty)$;
  - $F(0) = A$, $\lim_{x\to 0+} F(x) = 0.25$ i $F(0) \leqslant \lim_{x\to 0+} F(x) \Leftrightarrow A \leqslant 0.25$;
  - $F(\ln 2) = B \ln 2 + 0.25$, $\lim_{x\to \ln 2+} F(x) = 1 - e^{-\ln 2} = 0.5$
    i $F(\ln 2) \leqslant \lim_{x\to \ln 2+} F(x) \Leftrightarrow B \ln 2 + 0.25 \leqslant 0.5$

  Zatem warunek (ii) jest spełniony
  (czyli F jest niemalejąca na $\mathbb{R}$)
  $\iff 0 \leqslant A \leqslant 0.25$ oraz $0 \leqslant B \leqslant 0.25/\ln 2$.



Wykres $F(x)$ dla $A = 0.15$, $B = 0.25$, $C = 1$.

- Podsumowując:
  funkcja F jest dystrybuantą $\Leftrightarrow C = 1$, $0 \leqslant A \leqslant 0.25$, $0 \leqslant B \leqslant 0.25/\ln 2$.
- Wtedy $P(X \leqslant \ln 2) = \lim_{x\to \ln 2+} F(x) = 1 - 0.5 = 0.5$
- $P(X > -\ln 3) = 1 - \lim_{x\to -\ln 3+} F(x) = 1 - Ae^{-\ln 3} = 1 - \dfrac{A}{3}$
- $P(0 < X < 1) = F(1) - \lim_{x\to 0+} F(x) = 1 - e^{-1} - 0.25 \approx 0.3821$