Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

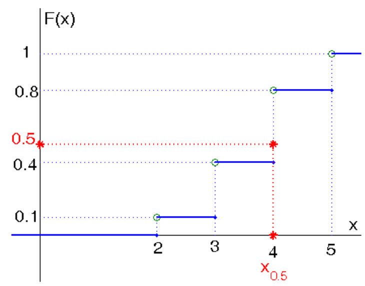
Przykłady 6. Wartość oczekiwana, wariancja, mediana, kwartyle rozkładu prawdopodobieństwa. Transformacje zmiennej losowej.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 6.1: charakterystyki liczbowe rozkładów dyskretnych

(a) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle dyskretnego rozkładu zmiennej losowej X podanego w tabeli:

n	1	2	3	4
x_n	2	3	4	5
p_n	0.1	0.3	0.4	0.2



- $\mathrm{E}X = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.2 = 3.7$
- $\mathrm{D}^2X = 2^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.2 - (\mathrm{E}X)^2 = 0.81$ $(\sqrt{\mathrm{D}^2X} = 0.9)$
- $x_{0.25} = 3$, $x_{0.5} = x_{0.75} = 4$

(b) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle dyskretnego rozkładu zmiennej losowej X, zadanego ciągiem $\{(x_n, p_n), n = 1, 2, \ldots\}$, gdzie $x_n = 2n$, $p_n = \frac{2}{3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

- $$\mathrm{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \frac{2}{3^n} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = 3.$$

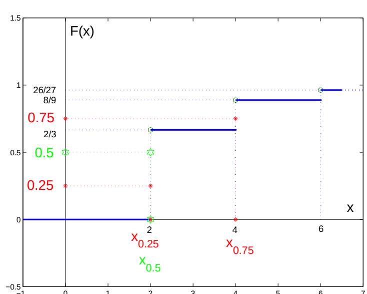
  (Skorzystaliśmy ze wzoru z Analizy Matematycznej: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ dla $|x| < 1$.)

- $$\mathrm{D}^2X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n - (\mathrm{E}X)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 \cdot \frac{2}{3^n} - 3^2 = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 9 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} - 9 = 3.$$

  (Skorzystaliśmy ze wzoru z Analizy Matematycznej: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ dla $|x| < 1$.)

  $(\sqrt{\mathrm{D}^2X} \approx 1.7230)$

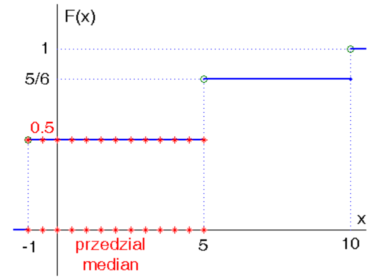
- $x_{0.25} = x_{0.5} = 2$, $x_{0.75} = 4$



(c) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle dyskretnego rozkładu zmiennej losowej X podanego w tabeli:

n	1	2	3
x_n	-1	5	10
p_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

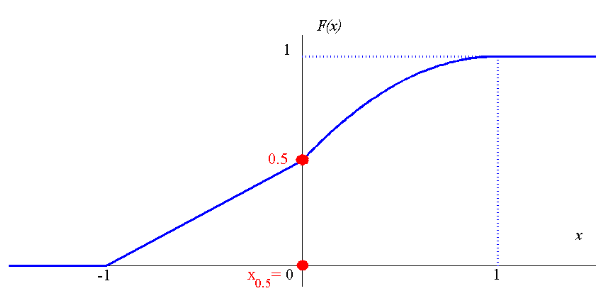
- $\mathrm{E}X = -1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \approx 2.8333$
- $\mathrm{D}^2X = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 5^2 \cdot \frac{1}{3} + 10^2 \cdot \frac{1}{6} - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{629}{36} \approx 17.4722$ $(\sqrt{\mathrm{D}^2X} \approx 4.1780)$
- $x_{0.25} = -1$, $x_{0.5}$ - dowolna liczba z przedziału $[-1, 5]$, $x_{0.75} = 5$



Przykłady 6.2: charakterystyki liczbowe rozkładów ciągłych

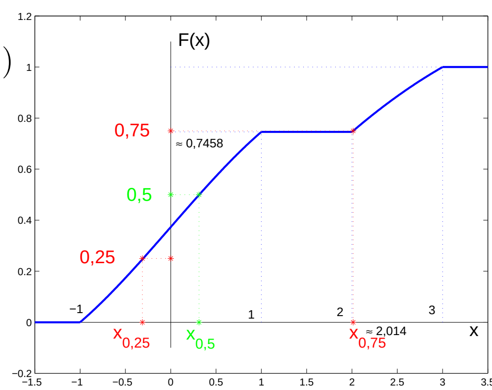
(a) Wylicz, o ile to możliwe, wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x. \end{cases}$

- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_{-1}^{0} 0.5x dx + \int\limits_{0}^{1} x(1-x) dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \approx -0.0833.$
- $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mathrm{E}X)^2 = \int\limits_{-1}^{0} 0.5x^2 dx + \int\limits_{0}^{1} x^2(1-x) dx - (-\frac{1}{12})^2 =$ $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12^2} = \frac{35}{144} \approx 0.2431$
- Dystrybuanta zmiennej losowej X to (z przykładu 5.3(a)) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1, \\ 0.5(x+1) & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 1 - 0.5(1-x)^2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x \end{cases}$
- $F(x_q) = q \iff \begin{cases} 0.5(x_q + 1) = q, \\ x_q \in [-1, 0) \end{cases}$ albo $\begin{cases} 1 - 0.5(1 - x_q)^2 = q, \\ x_q \in [0, 1) \end{cases}$ czyli $x_q = \begin{cases} 2q - 1 & \text{dla} \quad 0 < q < 0.5, \\ 1 - \sqrt{2(1-q)} & \text{dla} \quad 0.5 \leqslant q < 1. \end{cases}$
- Mediana $x_{0.5} = 0$



(b) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle ciągłego rozkładu zmiennej losowej X ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1, \\ -\frac{6}{59}(x^2-4) & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ -\frac{6}{59}(x-5) & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 0 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases}$

- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = -\frac{6}{59}\left(\int\limits_{-1}^{1} x(x^2-4)dx + \int\limits_{2}^{3} x(x-5)dx\right) =$
  $= -\frac{6}{59}\left(0 + \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2}\Big|_2^3\right)\right) = \frac{37}{59} \approx 0.6271$
  (pierwsza całka w sumie równa jest 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera)
- $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx - (\mathrm{E}X)^2 = -\frac{6}{59}\left(\int\limits_{-1}^{1} x^2(x^2-4)dx + \int\limits_{2}^{3} x^2(x-5)dx\right) - \left(\frac{37}{59}\right)^2 =$
  $= -\frac{6}{59}\left(2\left(\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) + \left(\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3}\Big|_2^3\right)\right) - \left(\frac{37}{59}\right)^2 = \frac{3748909}{10\cdot 59^2} \approx 1.4050$
  (wykorzystaliśmy fakt, że pierwsza całka jest z funkcji parzystej po przedziale symetrycznym względem zera)
  $(\sqrt{\mathrm{D}^2X} \approx 1,1850)$
- Dystrybuanta rozkładu X to (z przykładu 5.3(b))
  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1, \\ \frac{2(x(12-x^2)+11)}{59} & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ \frac{44}{59} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{3x(10-x)-4}{59} & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases}$

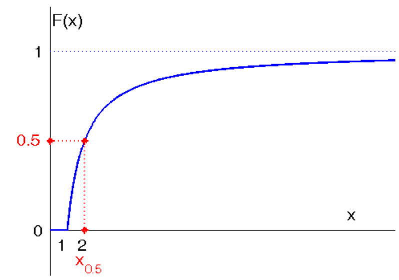


- $F(x) = 0.25 \Leftrightarrow \frac{2(x(12-x^2)+11)}{59} = 0.25; -1 < x < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -x^3 + 12x + 3.625 = 0; -1 < x < 1$
  $x_{0.25}$ jest rozwiązaniem tego równania
  Metodą przybliżoną otrzymujemy rozwiązanie $x_{0.25} \approx -0.3125$
- $F(x) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{2(x(12-x^2)+11)}{59} = 0.5; -1 < x < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -x^3 + 12x - 3.75 = 0; -1 < x < 1$
  $x_{0.5}$ jest rozwiązaniem tego równania
  Metodą przybliżoną otrzymujemy rozwiązanie $x_{0.5} \approx 0.3125$
- $F(x) = 0.75 \Leftrightarrow \frac{3x(10-x)-4}{59} = 0.75; 2 < x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 10x + \frac{193}{12} = 0; 2 < x < 3$
  $\Delta = \frac{107}{3}$, $x_{0.75} = \frac{10-\sqrt{\frac{107}{3}}}{2} \approx 2.0139$

(c) Wylicz, o ile to możliwe, wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{dla } x > 1, \end{cases}$

Rozwiązanie:

- wartość oczekiwana $\mathrm{E}X$ nie istnieje, bo całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2}dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞.
- Zatem wariancja D^2X nie jest nawet zdefiniowana.
- Dystrybuanta zmiennej losowej X to $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$
- $F(x_q) = q \iff 1 - \dfrac{1}{x_q} = q$, czyli $x_q = \dfrac{1}{1-q}$ dla $0 < q < 1$
- Mediana $x_{0.5} = 2$



(d) Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję oraz wyznacz medianę i kwartyle rozkładu zmiennej losowej Z o dystrybuancie $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leqslant 0, \\ 1-(1-z)^2 & \text{dla } 0 < z \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla } z > 1. \end{cases}$

- Jest to rozkład ciągły o gęstości $f(z) = F'(z) = \begin{cases} 2(1-z) & \text{dla } 0 < z < 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$
- $\mathrm{E}Z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz = 2\int\limits_{0}^{1} z(1-z)dz = 2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3} \approx 0.3333$
- $\mathrm{D}^2Z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2f(z)dz - (\mathrm{E}Z)^2 = 2\int\limits_{0}^{1} z^2(1-z)dz - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \approx 0.0556$

  $(\sqrt{\mathrm{D}^2Z} \approx 0.2357)$
- $F(z) = q \Leftrightarrow (1-z)^2 = 1-q \Leftrightarrow z = 1-\sqrt{1-q}$ dla $0 < q < 1$
- Zatem $z_{0.25} = 1-\sqrt{0.75} \approx 0.1340$, $z_{0.5} = 1-\sqrt{0.5} \approx 0.2929$, $z_{0.75} = 1-\sqrt{0.25} \approx 0.5$

Przykłady 6.3: transformacja zmiennej losowej - rozkład

(a) Gracz rzuca kostką do gry i otrzymuje 25 zł za liczbę oczek podzielną przez 3, a płaci 5 zł za każdy inny wynik. Ma on możliwość wykonania co najwyżej 5 rzutów, a jednocześnie musi przerwać grę po pierwszej wygranej. Niech Y oznacza wynik gracza (w zł). Znaleźć rozkład zmiennej losowej Y.

- X - czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie Bernoulliego, sukces - liczba oczek podzielna przez 3, $p = \frac{1}{3}$
- X ma rozkład geometryczny $\mathcal{G}eo(\frac{1}{3})$, $P(X = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$
- $Y = \begin{cases} 25 + (-5) \cdot (X - 1), & \text{gdy } X \leqslant 5, \\ -5 \cdot 5 = -25, & \text{gdy } X > 5. \end{cases}$
- Zatem $P(Y = 25 - 5(k - 1)) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$
  $P(Y = -25) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$
- Rozkład Y możemy także podać w tabeli:

X	1	2	3	4	5	>5
$Y = y_k$	25	20	15	10	5	-25
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{32}{243}$
$\approx$	0.3333	0.2222	0.1481	0.0988	0.0658	0.1318

(b) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(1)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$.

- X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(1)$, czyli gęstość postaci $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$
- Dystrybuanta zmiennej losowej $Z = X^2$ to $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X^2 < z) =$
  $= \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \leqslant 0, \\ P(|X| < \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z} + 0) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}), & \text{gdy } z > 0; \end{cases}$
  gdzie $F_X(x)$ to dystrybuanta zmiennej losowej X, tak że $f_X(x) = F_X'(x)$ dla niemal wszystkich x.
- $F_Z(z)$ odpowiada gęstości $f_Z(z) = F_Z'(z)$ dla niemal wszystkich z.
  Zatem $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{z}}(f_X(\sqrt{z}) + f_X(-\sqrt{z})), & \text{gdy } z > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}, & \text{gdy } z > 0. \end{cases}$
  Zauważmy, że jest to rozkład Weibulla $\mathcal{W}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Promień kuli R ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(4.9; 5.1)$ cm. Kulę wykonano z żelaza o gęstości 7.88 g/cm^3. Znaleźć rozkład masy M tej kuli.

- Gęstość R ma postać: $f_R(r) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r \notin [4.9; 5.1], \\ \frac{1}{5.1-4.9} = 5, & \text{gdy } r \in [4.9; 5.1]. \end{cases}$
- Masa kuli równa jest $M = a^{-3}R^3$, gdzie $a = \left(\frac{4\cdot 7.88\pi}{3}\right)^{-1/3} \approx 0.3117$.
- Dystrybuanta zmiennej losowej M ma postać

  $F_M(m) = P(M < m) = P(R^3 < a^3 m) = P(R < am^{1/3}) = F_R(am^{1/3})$,
  gdzie $F_R(r)$ to dystrybuanta rozkładu R.
- Stąd M ma rozkład o gęstości $f_M(m) = F'_M(m)$ dla niemal wszystkich m.

  Zatem $f_M(m) = \frac{a}{3}m^{-2/3}f_R(am^{1/3}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } m \notin [m_1, m_2], \\ \frac{5a}{3}m^{-2/3}, & \text{gdy } m \in [m_1, m_2], \end{cases}$

  gdzie $m_1 = \left(\frac{4.9}{a}\right)^3 \approx 3883.3190$, $m_2 = \left(\frac{5.1}{a}\right)^3 \approx 4378.5000$.

(d) Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = \text{arctg}X$.

- Gęstość rozkładu Cauchy'ego $\mathcal{C}(0, 1)$ ma postać $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

  Stąd dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać
  $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{1}{\pi}\text{arctg}x + \frac{1}{2}$.
- Dystrybuanta zmiennej losowej $Y = \text{arctg}X$ to $F_Y(y) = P(Y < y) =$

  $= \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ P(X < \text{tg}y) = F_X(\text{tg}y) = \frac{1}{\pi}y + \frac{1}{2}, & \text{gdy } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{gdy } y \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- $F_Y(y)$ odpowiada gęstości $f_Y(y) = F'_Y(y)$ dla niemal wszystkich y.

  Zatem $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{\pi}, & \text{gdy } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

  Jest to gęstość rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Wniosek: Y ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(e) Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = \sqrt{|X|}$.

- X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$, czyli gęstość postaci $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Dystrybuanta zmiennej losowej $Y = \sqrt{|X|}$ to $F_Y(y) = P(Y < y) =$
  $$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ y \leqslant 0, \\ P(|X| < y^2) = F_X(y^2) - F_X(-y^2 + 0) = F_X(y^2) - F_X(-y^2), & \text{gdy } \ y > 0; \end{cases}$$
  gdzie $F_X(x)$ to dystrybuanta rozkładu X.
- $F_Y(y)$ odpowiada gęstości $f_Y(y) = F_Y'(y)$ dla niemal wszystkich y.
  Zatem $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ y \leqslant 0, \\ 2y(f_X(y^2) + f_X(-y^2)) = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^4}{2}}, & \text{gdy } \ y > 0. \end{cases}$

Przykłady 6.4: transformacja zmiennej losowej - wartość oczekiwana

(a) Promień kuli R ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(4.9; 5.1)$ cm. Kulę wykonano z żelaza o gęstości 7.88 g/cm^3. Wyliczyć - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję losowej masy M tej kuli wykorzystując rozkład promienia losowego R.

- Masa kuli równa jest $M = a^{-3}R^3$, gdzie $a = (4 \cdot 7.88\pi/3)^{-1/3} \approx 0.3117$.
- Gęstość R ma postać: $f_R(r) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ r \notin [4.9; 5.1], \\ \frac{1}{5.1-4.9} = 5, & \text{gdy } \ r \in [4.9; 5.1]. \end{cases}$
- $\mathrm{E}M = a^{-3}\mathrm{E}R^3 = a^{-3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r^3 f_R(r)dr = 5a^{-3} \int\limits_{4.9}^{5.1} r^3 dr = 5a^{-3} \frac{5.1^4 - 4.9^4}{4} \approx 4127.6$ g.
- $\mathrm{D}^2M = \mathrm{E}M^2 - (\mathrm{E}M)^2 = a^{-6}\mathrm{E}R^6 - (\mathrm{E}M)^2 = a^{-6} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r^6 f_R(r)dr - (\mathrm{E}M)^2 =$
  $= 5a^{-6} \int\limits_{4.9}^{5.1} r^6 dr - (\mathrm{E}M)^2 = 5a^{-6} \frac{5.1^7 - 4.9^7}{7} - \left(5a^{-3} \frac{5.1^4 - 4.9^4}{4}\right)^2 \approx 20433.686$ g^2.

(b) Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$. Wyliczyć - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Y = \mathrm{arctg}X$ wykorzystując rozkład zmiennej losowej X.

- X ma gęstość postaci $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
- $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}\mathrm{arctg}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{arctg}x f_X(x)dx = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{arctg}x \cdot \dfrac{1}{x^2+1} dx =$
  $$= \frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{arctg}^2 x \Big|_{-\infty}^{0} + \mathrm{arctg}^2 x \Big|_{0}^{\infty} \right) = 0.$$
- $\mathrm{D}^2Y = \mathrm{E}Y^2 - (\mathrm{E}Y)^2 = \mathrm{E}\mathrm{arctg}^2 X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{arctg}^2 x f_X(x)dx =$
  $$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{arctg}^2 x \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{3\pi}\left(\mathrm{arctg}^3 x \Big|_{-\infty}^{0} + \mathrm{arctg}^3 x \Big|_{0} \infty \right) = \frac{2}{3\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^2}{12} \approx 0.8225.$$

Przykłady 6.5: nierówność Czebyszewa, nierówność Markowa

(a) Udowodnij nierówność Czebyszewa:
Jeśli istnieje wariancja D^2X, to dla każdego $a > 0$ mamy

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{D}^2X}{a^2}.$$

Dowód:
$\mathrm{D}^2X = \int\limits_{\Omega}(X - \mathrm{E}X)^2 dP \geqslant \int\limits_{\{|X-\mathrm{E}X|>a\}} (X - \mathrm{E}X)^2 dP \geqslant a^2 P(|X - \mathrm{E}X| \geqslant a)$ □

(b) Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0.517. Oszacować w jak licznej grupie noworodków prawdopodobieństwo tego, że liczba chłopców odbiega od średniej liczby chłopców w tej grupie o więcej niż 25% tej średniej, jest mniejsze niż 0.01?

- Niech n oznacza nieznaną liczność grupy noworodków, X - liczbę chłopców w tej grupie.
- Średnia liczba chłopców w tej grupie to $\mathrm{E}X$.
- Szukamy takiego n, dla którego

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geqslant 0.25\mathrm{E}X) < 0.01. \tag{1}$$

- Model: schemat Bernoulliego, sukces - urodzenie chłopca, $p = 0.517$, X - ilość sukcesów w n próbach, zatem $\mathrm{E}X = 0.517n$, $\mathrm{D}^2X = 0.517(1 - 0.517)n$.
- Z nierówności Czebyszewa dla $a = 0.25\mathrm{E}X$ mamy

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{D}^2X}{a^2} = \frac{0.517(1 - 0.517)n}{(0.25 \cdot 0.517n)^2} = \frac{7.728}{n}.$$

- Zatem warunkiem wystarczającym dla zachodzenia nierówności (1) jest $\frac{7.728}{n} < 0.01$, czyli równoważnie $n \geqslant 773$.
- Wniosek: W grupie 773 noworodków spełniony jest warunek z zadania.
- Być może, spełniony jest on także w mniejszej grupie, ale nie potrafimy tego szybko uzasadnić.