Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Przykłady 7. Rozkład łączny. Rozkłady brzegowe. Niezależność zmiennych losowych. Działania na zmiennych losowych.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 7.1: dyskretne rozkłady łączne

(a) Rozkład łączny wektora losowego (X, Y) podany jest w tabeli:

x_n / y_k	0	2
-2	0.1	0.2
0	0	0.2
1	0.2	0.3

Wyznacz rozkłady brzegowe tego wektora losowego. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne. Wylicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y.

- Rozkład brzegowy zmiennej losowej X:

x_n / y_k	0	2
-2	0.1	0.2
0	0	0.2
1	0.2	0.3
$p_{n\cdot}$	0.3	0.7

- Rozkład brzegowy zmiennej losowej Y:

x_n / y_k	0	2	$p_{\cdot k}$
-2	0.1	0.2	0.3
0	0	0.2	0.2
1	0.2	0.3	0.5

- X i Y nie są niezależne, bo
  np. $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 0.3 \cdot 0.2 = P(X = 0)P(Y = 0)$.
- Na podstawie rozkładów brzegowych wyliczamy:
  $\mathrm{E}X = 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.4$
  $\mathrm{D}^2X = 0^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.7 - (1.4)^2 = 0.84$
  $\mathrm{E}Y = -2 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 = -0.1$
  $\mathrm{D}^2Y = (-2)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 - (-0.1)^2 = 1.69$
- Na podstawie rozkładu łącznego wyliczamy:
  $\mathrm{E}XY = 0 \cdot (-2) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot (-2) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 1 \cdot 0.3 = -0.2$
- Stąd $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Y}} = \frac{-0.2 - 1.4\cdot(-0.1)}{\sqrt{0.84 \cdot 1.69}} = -\frac{0.06}{1.3\sqrt{0.84}} \approx -0.05$
- Uwaga: Z tego, że $\rho_{XY} \neq 0$, możemy innym sposobem wywnioskować, że zmienne losowe X i Y nie są niezależne.

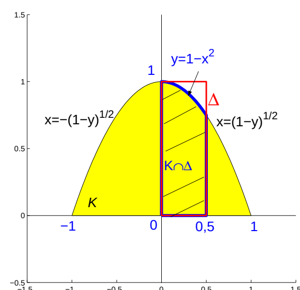
(b) Rozpatrujemy wielokrotny rzut symetryczną monetą. Niech X oznacza moment pojawienia się pierwszego orła, a Y - moment pojawienia się pierwszej reszki. Znajdź rozkład łaczny i rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y.

- Wektor losowy (X, Y) przyjmuje wartości $(x_n, y_k) = (n, k)$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$; z prawdopodobieństwem $p_{nk} = P((X, Y) = (x_n, y_k)) = P(X = n, Y = k) = \begin{cases} 0.5^n & \text{dla } \ k = 1, n \geqslant 2 \\ 0.5^k & \text{dla } \ n = 1, k \geqslant 2 \\ 0 & \text{poza } \ \text{tym.} \end{cases}$
- Sprawdzenie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{nk} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} 0.5^n + \sum\limits_{k=2}^{\infty} 0.5^k = 2 \cdot 0.5^2 \cdot \dfrac{1}{1 - 0.5} = 1.$
- Rozkład brzegowy zmiennej losowej X zadany jest ciągiem $\{(n, p_{n\cdot}), n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $p_{n\cdot} = P(X = n) = \sum\limits_{k \in \mathbb{T}_2} p_{nk} = \begin{cases} p_{n1} = 0.5^n & \text{dla } \ n \geqslant 2 \\ \sum\limits_{k=2}^{\infty} 0.5^k = 0.5 & \text{dla } \ n = 1 \end{cases} = 0.5^n.$
- Podobnie, rozkład brzegowy zmiennej losowej Y zadany jest ciągiem $\{(k, p_{\cdot k}), k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $p_{\cdot k} = P(Y = k) = 0.5^k$.

Przykłady 7.2: ciągłe rozkłady łączne

(a) Dobierz stałą C tak, aby funkcja $f(x, y) = \begin{cases} C & \text{dla } \ (x, y) \in K \\ 0 & \text{poza } \ \text{tym,} \end{cases}$
gdzie K to obszar ograniczony krzywymi $y = 1 - x^2$, $y = 0$,
była gęstością pewnego wektora losowego (X, Y). Oblicz następnie $P(0 < X < 0.5; 0 < Y < 1)$.
Wyznacz rozkłady brzegowe wektora losowego (X, Y).

- K: $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.
- $f(x, y) \geqslant 0$ dla każdego $(x, y) \iff C \geqslant 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = C \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} dy = C \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3} C = 1 \iff C = \frac{3}{4}.$
- Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $C = \frac{3}{4}$.



- $\Delta : 0 < x < 0.5, 0 < y < 1$
- $P(0 < X < 0.5, 0 < Y < 1) = \int\limits_{0}^{0.5} dx \int\limits_{0}^{1} f(x, y) dy = \frac{3}{4} \iint\limits_{\Delta \cap K} dx dy = \frac{3}{4} \int\limits_{0}^{0.5} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} dy =$
$= \int\limits_{0}^{0.5} (1 - x^2) dx = \frac{11}{32} = 0.34375$
- Wyznaczamy rozkłady brzegowe: $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{3}{4} \int\limits_{0}^{1-x^2} dy = \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{dla } \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } \ \text{pozostałych } \ x. \end{cases}$

K: $0 \leqslant y \leqslant 1, -\sqrt{1 - y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y}$.

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{3}{4} \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{1 - y} & \text{dla } \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } \ \text{pozostałych } \ y. \end{cases}$$

(b) Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y+y) & \text{dla } 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$ jest gęstością pewnego wektora losowego (X,Y). Wyznacz rozkłady brzegowe tego wektora losowego. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

- Rozkłady brzegowe są ciągłe i mają gęstości postaci:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2+1)\int\limits_0^2 ydy = \frac{3}{4}(x^2+1) & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{8}y\int\limits_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{2}y & \text{dla } 0<y<2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y. \end{cases}$$

- Ponieważ dla każdego (x,y) mamy $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$, więc także $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ i zmienne losowe X i Y są niezależne.

(c) Wektor losowy (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.5(x+3y) & \text{dla } 0<x,y<1; \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wylicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = 0.5\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x(x+3y)dy = 0.5\int\limits_0^1(x^2+\frac{3}{2}x)dx = 0.5\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{24};$

- $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}X)^2 = 0.5\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x^2(x+3y)dy - \left(\frac{13}{24}\right)^2 =$
  $= 0.5\int\limits_0^1(x^3+\frac{3}{2}x^2)dx - \left(\frac{13}{24}\right)^2 = 0.5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{13}{24}\right)^2 = \frac{47}{24^2};$

- $\mathrm{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = 0.5\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 y(x+3y)dy = 0.5\int\limits_0^1(\frac{1}{2}x+1)dx = 0.5\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{5}{8};$

- $\mathrm{D}^2Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}Y)^2 = 0.5\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 y^2(x+3y)dy - \left(\frac{5}{8}\right)^2 =$
  $= 0.5\int\limits_0^1(\frac{1}{3}x+\frac{3}{4})dx - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 0.5\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{13}{24}\right)^2 = \frac{13}{3\cdot 8^2};$

- $\mathrm{E}XY = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = 0.5\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 xy(x+3y)dy =$
  $= 0.5\int\limits_0^1(\frac{1}{2}x^2+x)dx = 0.5\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3};$

- $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Y}} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{13}{24}\cdot\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{47}{24^2}\cdot\frac{13}{3\cdot 8^2}}} = -\sqrt{\frac{3}{611}} \approx -0.0049.$

- Ponieważ $\rho_{XY} \neq 0$, zmienne losowe X i Y nie są niezależne.

Przykłady $\boxed{7.3}$: działania na zmiennych losowych

(a) Rozkład łączny wektora losowego (X, Y) podany jest w tabeli:

	x_n	0	2
y_k			
-2		0.1	0.2
0		0	0.2
1		0.2	0.3

Wyznacz (o ile to możliwe) rozkład sumy, iloczynu i ilorazu zmiennych losowych X i Y.

- $Z = X + Y$ przyjmuje wartości ze zbioru
  $\{-2+0, 0+0, 1+0, -2+2, 0+2, 1+2\} = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$
  z prawdopodobieństwami podanymi w tabeli:

z_j	-2	0	1	2	3
$p_j^{(Z)}$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3

- $Z_1 = XY$ przyjmuje wartości ze zbioru $\{-2 \cdot 0, 0 \cdot 0, 1 \cdot 0, -2 \cdot 2, 0 \cdot 2, 1 \cdot 2\} = \{-4, 0, 2\}$
  z prawdopodobieństwami podanymi w tabeli:

z_j	-4	0	2
$p_j^{(Z_1)}$	0.2	0.5	0.3

- Iloraz $\dfrac{X}{Y}$ nie jest określony, bo $P(Y = 0) \neq 0$.

(b) Wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{dla } \; 0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

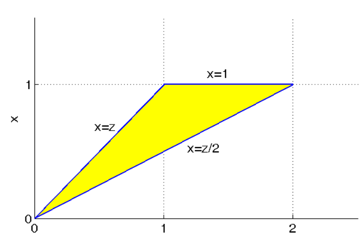
Wyznacz (o ile to możliwe) rozkład sumy, iloczynu i ilorazu zmiennych losowych X i Y.

- $Z = X + Y$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$$

Tutaj dla ustalonego z

$$f(x, z-x) = \begin{cases} 2z & \text{dla} \; \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z - x \leqslant x, \end{array} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$



Zatem dla $0 \leqslant z \leqslant 1$ mamy $f(x, z-x) = \begin{cases} 2z & \text{dla } \; z/2 \leqslant x \leqslant z, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$

i stąd

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx = 2z \int\limits_{z/2}^{z} dx = z^2$$

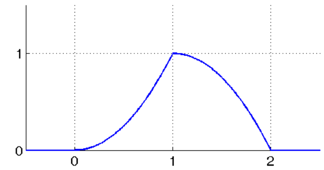
Natomiast dla $1 < z \leqslant 2$ mamy $f(x, z-x) = \begin{cases} 2z & \text{dla } \ z/2 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$

i stąd

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx = 2z \int_{z/2}^{1} dx = z(2-z).$$

Dla pozostałych z $f(x, z-x) = 0$ dla wszystkich x i stąd $f_Z(z) = 0$.
Podsumowując: dla $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2 & \text{dla } \ 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ z(2-z) & \text{dla } \ 1 < z \leqslant 2, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

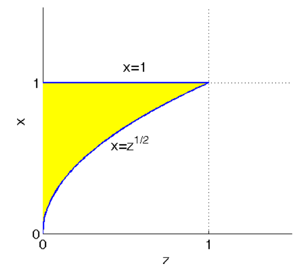


- $Z_1 = XY$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

Dla ustalonego z

$$f\left(x, \frac{z}{x}\right) = \begin{cases} 2\left(x + \frac{z}{x}\right) & \text{dla } \begin{array}{l} 0 < x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant \frac{z}{x} \leqslant x, \end{array} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$



Dla $0 < z \leqslant 1$ mamy zatem

$$f\left(x, \frac{z}{x}\right) = \begin{cases} 2\left(x + \frac{z}{x}\right) & \text{dla } \ \sqrt{z} \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

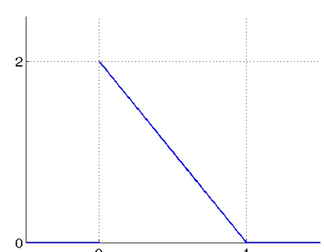
Stąd

$$f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{\sqrt{z}}^{1} \frac{1}{x} \cdot 2\left(x + \frac{z}{x}\right) dx = 2\int_{\sqrt{z}}^{1} \left(1 + \frac{z}{x^2}\right) dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{z}{x}\Big|_{x=\sqrt{z}}^{x=1} = 2\left((1-z) - (\sqrt{z} - \frac{z}{\sqrt{z}})\right) = 2(1-z)\right.$$

Dla pozostałych z $f\left(x, \frac{z}{x}\right) = 0$ dla wszystkich x i stąd $f_{Z_1}(z) = 0$.
Podsumowując: dla $Z_1 = XY$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} 2(1-z) & \text{dla } \ 0 < z \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

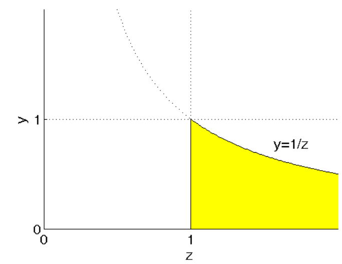


- $Z_2 = \dfrac{X}{Y}$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{Z_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| f(yz, y) dy$$

Dla ustalonego z

$$f(yz, y) = \begin{cases} 2(yz + y) & \text{dla } 0 \leqslant yz \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant yz, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$



Dla $z \geqslant 1$ mamy

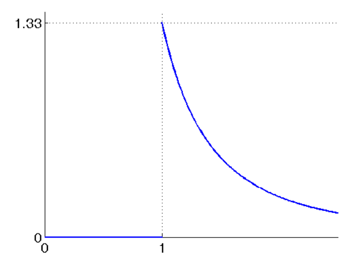
$$f(yz, y) = \begin{cases} 2(z + 1)y & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{z}, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Stąd

$$f_{Z_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y| f(yz, y) dy = \int\limits_{0}^{1/z} y \cdot 2(z + 1) y dy = 2(z + 1) \cdot \frac{y^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=1/z} = \frac{2(1 + z)}{3z^3}$$

Dla $z < 1$ $f(yz, y) = 0$ dla wszystkich y i stąd $f_{Z_2}(z) = 0$.
Podsumowując: dla $Z_2 = \dfrac{X}{Y}$

$$f_{Z_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{2(1 + z)}{3z^3} & \text{dla } z \geqslant 1, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$



(c) Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(0.2)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(-1, 2)$. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = 2X - 3Y - 2$.

- X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda = 0.2)$, zatem $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda} = 5$ i $\mathrm{D}^2 X = \frac{1}{\lambda^2} = 25$.
- Y rozkład normalny $\mathcal{N}(m = -1, \sigma = 2)$, zatem $\mathrm{E}Y = m = -1$ i $\mathrm{D}^2 Y = \sigma^2 = 4$.
- $\mathrm{E}Z = \mathrm{E}(2X - 3Y - 2) = 2\mathrm{E}X - 3\mathrm{E}Y - 2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 = 11$.
- X i Y są niezależne, więc $\mathrm{D}^2 Z = \mathrm{D}^2(2X - 3Y - 2) = \mathrm{D}^2(2X - 3Y) =$
$= \mathrm{D}^2(2X) + \mathrm{D}^2(-3Y) = 2^2 \mathrm{D}^2 X + (-3)^2 \mathrm{D}^2 Y = 4 \cdot 25 + 9 \cdot 4 = 136$.

(d) Niech $Z = X + 2Y - 1$, gdzie X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0.4$; a Y ma rozkład normalny $\mathcal{N}(1, 1)$, przy czym zmienne losowe X i Y są niezależne. Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Z.

- Mamy wyliczyć $\rho_{XZ} = \dfrac{\mathrm{E}XZ - \mathrm{E}X\mathrm{E}Z}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Z}}$
- X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0.4$, czyli rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n = 1, p = 0.4)$, zatem $\mathrm{E}X = np = 0.4$ i $\mathrm{D}^2X = np(1-p) = 0.24$.
- Y ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m = 1, \sigma = 1)$, zatem $\mathrm{E}Y = m = 1$ i $\mathrm{D}^2Y = \sigma^2 = 1$.
- $\mathrm{E}Z = \mathrm{E}(X + 2Y - 1) = \mathrm{E}X + 2\mathrm{E}Y - 1 = 0.4 + 2 \cdot 1 - 1 = 1.4$
- Zmienne losowe X i Y są niezależne.
  Zatem $\mathrm{D}^2Z = \mathrm{D}^2(X + 2Y - 1) = \mathrm{D}^2X + 2^2\mathrm{D}^2Y = 0.24 + 4 \cdot 1 = 4.24$
  oraz
  $\mathrm{E}XZ = \mathrm{E}(X(X + 2Y - 1)) = \mathrm{E}(X^2 + 2XY - X) = \mathrm{E}X^2 + 2\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X =$
  $= \mathrm{D}^2X + (\mathrm{E}X)^2 + 2\mathrm{E}X\mathrm{E}Y - \mathrm{E}X = 0.24 + (0.4)^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 1 - 0.4 = 0.8.$
- Otrzymujemy $\rho_{XZ} = \frac{0.8 - 0.4 \cdot 1.4}{\sqrt{0.24 \cdot 4.24}} \approx 0.2379.$

Inny sposób:

- Mamy wyliczyć $\rho_{XZ} = \dfrac{\mathrm{E}XZ - \mathrm{E}X\mathrm{E}Z}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Z}}$
- $\mathrm{D}^2(X + Z) = \mathrm{D}^2X + \mathrm{D}^2Z + 2(\mathrm{E}XZ - \mathrm{E}X\mathrm{E}Z)$, zatem
  $\mathrm{E}XZ - \mathrm{E}X\mathrm{E}Z = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^2(X + Z) - \mathrm{D}^2X - \mathrm{D}^2Z)$ i w konsekwencji,

$$\rho_{XZ} = \frac{\mathrm{D}^2(X + Z) - \mathrm{D}^2X - \mathrm{D}^2Z}{2\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Z}}$$

- X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0.4$, czyli rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n = 1, p = 0.4)$, zatem $\mathrm{D}^2X = np(1-p) = 0.24$.
- Y ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m = 1, \sigma = 1)$, zatem $\mathrm{D}^2Y = \sigma^2 = 1$.
- Zmienne losowe X i Y są niezależne, więc
  $\mathrm{D}^2Z = \mathrm{D}^2(X + 2Y - 1) = \mathrm{D}^2X + 2^2\mathrm{D}^2Y = 0.24 + 4 \cdot 1 = 4.24$
  $\mathrm{D}^2(X + Z) = \mathrm{D}^2(2X + 2Y - 1) = 2^2\mathrm{D}^2X + 2^2\mathrm{D}^2Y = 4(0.24 + 1) = 4.96$
- Otrzymujemy $\rho_{XZ} = \frac{4.96 - 0.24 - 4.24}{2\sqrt{0.24 \cdot 4.24}} \approx 0.2379.$

Przykłady 7.4: rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

(a) X i Y to niezależne zmienne losowe odpowiednio o rozkładach $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Wyznacz rozkład sumy tych zmiennych losowych.

- Wiemy, że $\varphi_X(t) = e^{itm_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{itm_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}$.
- X i Y są niezależne. Zatem $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{itm_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} \cdot e^{itm_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{it(m_1+m_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$.
- Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$,
  zatem $X + Y$ ma taki właśnie rozkład normalny.

(b) X i Y to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie $\mathcal{B}(1,p)$.Wyznacz rozkład sumy tych zmiennych losowych.

- Wiemy, że $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)=(pe^{it}+(1-p))^1$.

- X i Y są niezależne. Zatem $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(pe^{it}+(1-p))^2$.
- Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu $\mathcal{B}(2,p)$, zatem $X+Y$ ma taki właśnie rozkład Bernoulliego.
- **Uwaga:** Podobnie możemy pokazać, że jeśli $X_1,X_2,\dots,X_n$ to niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie $\mathcal{B}(1,p)$, to suma $X_1+X_2+\dots+X_n$ ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$.

(c) X i Y to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda)$.Wyznacz rozkład sumy tych zmiennych losowych.

- Wiemy, że $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)=(1-it/\lambda)^{-1}$.
- X i Y są niezależne. Zatem $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-it/\lambda)^{-2}$.
- Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu $\mathcal{G}(2,\lambda)$, zatem $X+Y$ ma taki właśnie rozkład gamma.

Przykłady 7.5: rozkład minimum i maksimum niezależnych zmiennych losowych

(a) X i Y to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie Weibulla $\mathcal{W}(\lambda,p)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z=\min(X,Y)$.

- Dystrybuanta zmiennych losowych X i Y ma postać

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x p\lambda^p t^{p-1}e^{-(\lambda t)^p}dt, & \text{gdy } \ x\geqslant 0,\\ 0, & \text{gdy } \ x<0;\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-(\lambda x)^p}, & \text{gdy } \ x\geqslant 0,\\ 0, & \text{gdy } \ x<0.\end{cases}$$

- Zmienna losowa $Z=\min(X,Y)$ ma dystrybuantę postaci

$$F_Z(z)=1-(1-F(z))^2=\begin{cases}1-(1-(1-e^{-(\lambda z)^p}))^2, & \text{gdy } \ z\geqslant 0,\\ 1-(1-0)^2, & \text{gdy } \ z<0;\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}1-e^{-(2^{1/p}\lambda z)^p}, & \text{gdy } \ z\geqslant 0,\\ 0, & \text{gdy } \ z<0.\end{cases}$$

- Jest to dystrybuanta rozkładu Weibulla $\mathcal{W}(2^{1/p}\lambda,p)$, zatem $Z=\min(X,Y)$ ma taki właśnie rozkład.
- **Uwaga:** W szczególności, jeżeli X i Y to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie wykładniczym $\mathcal{E}xp(\lambda)$, to $Z=\min(X,Y)$ ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(2\lambda)$.

(b) X i Y to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie o dystrybuancie

$$F(x)=\exp(-e^{-(x-m)/a})$$

(jest to tzw. **rozkład wartości ekstremalnych** z parametrami $m\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$). Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z=\max(X,Y)$.

- Zmienna losowa Z ma dystrybuantę postaci

$$F_Z(z)=(F(z))^2=(\exp(-e^{-(x-m)/a}))^2=\exp(-e^{-(x-(m+a\ln 2))/a}).$$

- Jest to dystrybuanta rozkładu wartości ekstremalnych z parametrami $m_Z=m+a\ln 2$, $a_Z=a$, zatem $Z=\max(X,Y)$ ma taki właśnie rozkład.