Rachunek Prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

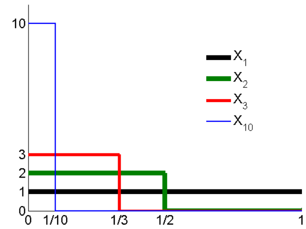
Przykłady 8. Różne rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych. Prawa wielkich liczb. Twierdzenia graniczne.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykłady 8.1: zbieżności ciągów zmiennych losowych

(a) Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ - borelowskie podzbiory Ω, P-prawdopodobieństwo geometryczne. Definiujemy

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \omega < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{gdy} \quad \frac{1}{n} \leqslant \omega \leqslant 1. \end{cases}$$



Pokaż, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$, gdzie $P(X=0)=1$.

- Przy ustalonym $\omega \in (0,1]$ dla $n \geqslant \frac{1}{\omega}$ mamy $X_n(\omega) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Ponieważ $P(\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0) = P(0,1] = 1$,
  mamy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$, gdzie $P(X=0)=1$.
- **Uwaga:** Ponieważ $X_n(0) = n \to \infty$, więc ciąg ten nie jest zbieżny punktowo.

(b) Rozważmy ciąg (X_n) taki, że $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 1)$.
Pokaż, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ oraz dla dowolnego $r > 0$ $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} X$, gdzie $P(X=0)=1$.

- Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy $P(|X_n - 0| \geqslant \epsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
  Zatem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, gdzie $P(X=0)=1$.
- Dla dowolnego $r > 0$ mamy $\mathrm{E}X_n^r = 0 + 1^r \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
  Zatem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} X$, gdzie $P(X=0)=1$.

(c) Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$-podzbiory borelowskie Ω, P-prawdopodobieństwo geometryczne. Definiujemy

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{n}{2n+1}, \\ 1, & \text{gdy} \quad \frac{n}{2n+1} < \omega \leqslant 1. \end{cases}$$

Pokaż, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, gdzie X taka, że $P(X=0) = P(X=1) = 0.5$.

- Mamy $F_n(x) = P(X_n < x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant 0, \\ P(X_n = 0) = \frac{n}{2n+1}, & \text{gdy} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 1. \end{cases}$
- Zatem dla każdego x mamy $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$, gdzie $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant 0, \\ 0.5, & \text{gdy} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 1, \end{cases}$
  jest dystrybuantą zmiennej losowej X takiej, że $P(X=0) = P(X=1) = 0.5$.
  Otrzymujemy więc, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

- **Uwaga:** X możemy zdefiniować na różne sposoby, np.

$$X = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 0.5, \\ 1, & \text{gdy} \quad 0.5 < \omega \leqslant 1. \end{cases}$$

albo

$$X = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 0.5, \\ 0, & \text{gdy} \quad 0.5 < \omega \leqslant 1. \end{cases}$$

albo jeszcze inaczej.

(d) Niech $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 0.5$ oraz niech $X_{n+1} = -X_n$. Pokaż, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, gdzie X ma taki rozkład jak X_1, ale ciąg ten nie jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 ani stochastycznie.

- Mamy dla każdego x $F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant -1, \\ 0.5, & \text{gdy} \quad -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 1. \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x).$

  Zatem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, gdzie X ma taki rozkład jak X_1.
- Ciąg (X_n) nie jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1, bo przy ustalonym ω ciąg $X_n(\omega)$ albo ma postać $(-1)^n$ albo $(-1)^{n+1}$, a są to ciągi rozbieżne.
- Ciąg (X_n) nie jest też zbieżny stochastycznie.

  Dowód (nie wprost):
  Załóżmy, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.
  Granica X musi mieć rozkład taki jak X_1.
  Wtedy dla $\epsilon < 2$ mamy
  $a_n = P(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = P(X_n = -1, X = 1) + P(X_n = 1, X = -1)$ oraz
  $a_{n+1} = P(|X_{n+1} - X| \geqslant \epsilon) = P(X_{n+1} = -1, X = 1) + P(X_{n+1} = 1, X = -1) =$
  $= P(X_n = 1, X = 1) + P(X_n = -1, X = -1) = 1 - a_n$.
  Ciąg a_n spełnia równanie rekurencyjne $a_{n+1} = 1 - a_n$. Zatem, o ile ma granicę, to granicę równą 0.5.
  W konsekwencji, $P(|X_n - X| \geqslant \epsilon)$ nie może zbiegać do 0, co sprzeczne jest z założeniem.

(e) Niech zmienna losowa Y_n ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(a_n)$ dla pewnego $a_n > 0$, $a_n \to \infty$. Zdefiniujmy $X_n = \dfrac{Y_n - a_n}{\sqrt{a_n}}$. Jaka jest granica według rozkładu ciągu (X_n)?

- Mamy $\varphi_{Y_n}(t) = e^{a_n(e^{it}-1)}$, a stąd $\varphi_{X_n}(t) = \mathrm{E}e^{it(Y_n - a_n)/\sqrt{a_n}} = e^{a_n(e^{it/\sqrt{a_n}}-1) - it\sqrt{a_n}}$.
- $a_n(e^{it/\sqrt{a_n}} - 1) - it\sqrt{a_n} = a_n \left(1 + \dfrac{it}{\sqrt{a_n}} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{it}{\sqrt{a_n}}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{a_n}\right) - 1 - \dfrac{it}{\sqrt{a_n}}\right) =$

  $= -\dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{o\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\frac{1}{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\dfrac{1}{2}t^2$.
- Stąd $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.
- Granica $\varphi(t)$ jest ciągła w 0 i jest to funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$.
- Z twierdzenia Lévy'ego otrzymujemy zatem, że $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, gdzie X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przykład 8.2: prawa wielkich liczb
Rozważmy ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym X_n ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m = a^n, \sigma = \sqrt[4]{n/4})$, gdzie $a \in (0,1)$. Pokaż, że ciąg ten spełnia SPWL i MPWL.

- $\mathrm{E}X_n = a^n$, $\mathrm{D}^2 X_n = \sqrt{n}/2$,

  a z niezależności $\dfrac{\mathrm{D}^2(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{\sqrt{1}}{2} + \ldots + \dfrac{\sqrt{n}}{n}\right)$.

- Mamy
$$0 \leqslant \frac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} \leqslant \frac{n\sqrt{n}}{2n^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
  i z twierdzenia o 3 ciągach $\dfrac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zatem z twierdzenia Markowa badany ciąg spełnia SPWL.

- Ponadto (skoro $\mathrm{D}^2 X_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$) mamy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2 X_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \qquad (p = 3/2 > 1).$$
  Zatem z twierdzenia Kołmogorowa badany ciąg spełnia MPWL.

Przykłady 8.3: twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a

(a) Ustalmy $\epsilon = \delta = 0.05$. Chcemy wyznaczyć n, dla którego mamy
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \delta. \tag{1}$$

Rozwiązanie:

- Metoda na podstawie nierówności Czebyszewa prowadzi do wniosku, że warunek (1) jest spełniony, gdy $n > \dfrac{p(1-p)}{\delta\epsilon^2}$.

  Dla $p = 0.5$, $\epsilon = 0.05$ i $\delta = 0.05$ otrzymujemy $n > \dfrac{0.5^2}{0.05^3} \Rightarrow\ n > 2000$.
- Na podstawie twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a, dla $p = 0.5$, $\epsilon = 0.05$, $\delta = 0.05$, otrzymujemy, że dla spełnienia warunku (1) wystarczy, aby
$$2(1 - \Phi(0.1\sqrt{n})) + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.05. \tag{2}$$
  Możemy oszacować n, dla których warunek (2) będzie spełniony, w następujący sposób:

  $2(1 - \Phi(0.1\sqrt{n})) < 0.01 \iff \Phi(0.1\sqrt{n}) > 0.995 \iff$
  $\iff 0.1\sqrt{n} > 2.576$ (z tablic) $\iff n > 25.76^2 = 663.5776$.

  Dla $n > 663$ mamy $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0.039 \leqslant 0.04$.

  Zatem, gdy $n > 663$, to $2(1 - \Phi(0.1\sqrt{n})) + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0.01 + 0.04 = 0.05$, a w konsekwencji zachodzi (1).

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(b) W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczną składkę 30 zł za samochód. Średnio 6 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 2500 zł. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacuj, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku zysk przekroczy 125000 zł. Oszacuj też błąd przybliżenia.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces to uszkodzenie samochodu,
  $p = 0.006$ (6 na 1000 samochodów)
  S_n to liczba sukcesów w n próbach, czyli liczba uszkodzeń ubezpieczonych samochodów,
  $n = 10000 = 10^4$
- Wpłata do towarzystwa ubezpieczeniowego wynosi $30 \cdot n = 3 \cdot 10^5$ zł.
  Wypłata to $2500 \cdot S_n$ zł. Zysk towarzystwa to $Z = 3 \cdot 10^5 - 2500 \cdot S_n$.
- Zysk przekroczy 125000 zł $\Leftrightarrow Z > 125000 \Leftrightarrow S_n < 70$.

  Mamy zatem oszacować $P(S_n < 70)$, przy czym $n = 10^4$ jest dość duże, by użyć przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a.
- Otrzymujemy
  $P(S_n < 70) \approx \Phi\left(\frac{70-0.5-10^4 \cdot 0.006}{\sqrt{10^4 \cdot 0.006 \cdot (1-0.006)}}\right) = \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{59.64}}\right) \approx \Phi(1.23) = 0.8907$
  z tablic standardowego rozkładu normalnego.
- Błąd przybliżenia nie przekracza $\frac{0.5(0.006^2+(1-0.006)^2)}{\sqrt{10^4 \cdot 0.006 \cdot (1-0.006)}} \approx 0.0640$
- **Odp.** Prawdopodobieństwo, że w ciągu roku zysk przekroczy 125000 zł, wynosi
  0.8907 ± 0.0640.
- Uwaga: Wynik dokładny otrzymany w Matlabie komendą `binocdf(69,10000,0.006)` to 0.8889

Przykłady 8.4: centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Lévy'ego

(a) Pewna konstrukcja składa się ze 100 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego oszacuj prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 333 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwaną 3.3 kg i odchylenie standardowe 0.1 kg.

Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez X_k masę elementu nr k w kg, $k = 1, 2, \ldots, 100$. Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Z treści zadania mają one jednakowy rozkład, przy czym $m = \mathrm{E}X_k = 3.3$; a $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2 X_k} = 0.1$.
- Masa całej konstrukcji to $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dla $n = 100$. Mamy oszacować $P(S_n \leqslant 333)$.
- Ponieważ wariancja $\mathrm{D}^2 X_k = \sigma^2$ jest skończona i większa od 0, a $n = 100$ wystarczająco duże, możemy skorzystać z CTG Lindeberga–Lévy'ego. Otrzymujemy
  $P(S_n \leqslant 333) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{333-100 \cdot 3.3}{0.1\sqrt{100}}\right) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant 3\right) \approx \Phi(3.00) = 0.9987$

  na podstawie tablic standardowego rozkładu normalnego.
- **Odp.** Prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 333 kg, to w przybliżeniu 0.9987.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

(b) Czas oczekiwania na tramwaj linii 4 jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 15 minut. Pan A codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacuj na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego prawdopodobieństwo, że pan A traci kwartalnie (czyli w ciągu 65 kolejnych dni roboczych) na czekanie na tramwaj linii 4 więcej niż 1000 minut.

Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez X_k czas oczekiwania na tramwaj w dniu o kolejnym numerze k (w minutach), $k = 1, 2, \ldots, 65$.
  Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{65}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.
- Z treści zadania mają one jednakowy rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$ o średniej $m = \mathrm{E}X_k = 15$ minut. Ponieważ dla takiego rozkładu $m = \mathrm{E}X_k = \frac{1}{\lambda}$, a $\sigma^2 = \mathrm{D}^2 X_k = \frac{1}{\lambda^2} = m^2$, więc mamy tu $\sigma = 15$.
- Czas stracony kwartalnie na dojazdy to $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ dla $n = 65$.
  Mamy oszacować $P(S_n > 1000)$.
- Ponieważ wariancja $\mathrm{D}^2 X_k = \sigma^2$ jest skończona i większa od 0, a $n = 65$ wystarczająco duże, możemy skorzystać z CTG Lindeberga–Lévy'ego. Otrzymujemy
  $P(S_n > 1000) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1000-65\cdot 15}{15\sqrt{65}}\right) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{5}{3\sqrt{65}}\right) \approx$
  $\approx 1 - \Phi\left(\frac{5}{3\sqrt{65}}\right) \approx 1 - \Phi(0.21) = 1 - 0.5832 = 0.4168$
  z tablic standardowego rozkładu normalnego.
- Dla X_1 o rozkładzie $\mathcal{E}xp(\lambda = 1/15)$ mamy $\mathrm{E}|X_1 - m|^3 = \frac{1}{15}\int\limits_0^\infty |x-15|^3 e^{-x/15} dx = 15^3(12e^{-1} - 2)$.
  Zatem błąd przybliżenia z nierówności Berry-Esseena nie przekracza $\dfrac{12e^{-1} - 3}{2\sqrt{65}} \approx 0.15$.
- **Odp.** Prawdopodobieństwo, że pan A traci kwartalnie na czekanie na tramwaj linii 4 więcej niż 1000 minut, to w przybliżeniu 0.4168 ± 0.15.
- Uwaga: Ponieważ X_k ma rozkład wykładniczy, można pokazać, że S_n ma rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, n)$. Stąd wynik dokładny 0.4027 otrzymamy w Matlabie komendą `1-gamcdf(1000,65,15)`.

(c) Na ulicy stoi sprzedawca gazet. Załóżmy, że każdy z mijających go przechodniów kupuje gazetę z jednakowym prawdopodobieństwem. Średni czas sprzedaży 1000 gazet jest równy 4 godziny i z prawdopodobieństwem 0.95 zawiera się w przedziale od 3 do 5 godzin. Oszacuj na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego, ile maksymalnie gazet może zamówić sprzedawca, aby z prawdopodobieństwem 0.99 nie pozostała mu żadna po 6 godzinach?

Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez T_i czas od sprzedaży $(i-1)$-szej do sprzedaży i-tej gazety (w godzinach), $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Załóżmy, że $T_1, T_2, \ldots, T_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie, przy czym skończone są $\mathrm{E}T_i = m$ i $\mathrm{D}^2 T_i = \sigma^2 > 0$.
- Wtedy z CTG Lindeberga–Lévy'ego $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ ma asymptotycznie rozkład normalny $\mathcal{N}(mn, \sigma\sqrt{n})$.
- Z treści zadania $1000m = \mathrm{E}S_{1000} = 4$. Mamy zatem $m = 0.004$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- Ponadto $P(3 \leqslant S_{1000} \leqslant 5) = 0.95$, a ponieważ
$P(3 \leqslant S_{1000} \leqslant 5) = P\left(\frac{3-4}{\sigma\sqrt{1000}} \leqslant \frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{5-4}{\sigma\sqrt{1000}}\right) \approx$
$\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{100\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{10}}{100\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{100\sigma}\right) - 1,$
otrzymujemy

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{100\sigma}\right) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{100\sigma}\right) = 0.975 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{100\sigma} = 1.96 \qquad \text{(z tablic rozkładu normalnego)}$$
$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{\sqrt{10}}{196}$$

- Szukamy takiego n, aby
$$P\left(S_n \leqslant 6\right) \geqslant 0.99 \tag{3}$$

- Z CTG Lindeberga-Lévy'ego mamy
$P\left(S_n \leqslant 6\right) = P\left(\frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{6 - 0.004n}{\frac{\sqrt{10}}{196}\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{196(6-0.004n)}{\sqrt{10n}}\right).$

- Jeżeli
$$\Phi\left(\frac{196(6-0.004n)}{\sqrt{10n}}\right) \geqslant 0.99; \tag{4}$$
to uznajemy, że nierówność (3) jest spełniona.

- Z tablic standardowego rozkładu normalnego odczytujemy, że $\Phi(2.326) = 0.99$.

- Zatem nierówność (4) jest spełniona, gdy
$$\frac{196(6-0.004n)}{\sqrt{10n}} \geqslant 2.326$$

- $\Leftrightarrow 1176 - 0.784n \geqslant 2.326\sqrt{10n} \Leftrightarrow 76832n^2 - 237258845n + 76832 \cdot (1500)^2 \geqslant 0,$
gdzie n jest liczbą naturalną mniejszą lub równą 1500, $\Leftrightarrow n \leqslant 1177$.

- **Odpowiedź:**
Maksymalna liczba gazet, którą z prawdopodobieństwem 0.99 uda się sprzedać w ciagu 6 godzin, to 1177.

Przykłady 8.5: twierdzenie Poissona, losowanie ze zwracaniem i bez zwracania

(a) Przy masowych prześwietleniach małoobrazkowych prawdopodobieństwo natrafienia na chorego na gruźlicę jest 0.01. Na podstawie przybliżenia Poissona oszacuj prawdopodobieństwo, że wśród 200 osób prześwietlonych będzie nie mniej niż 3 chorych. Następnie oszacuj to prawdopodobieństwo na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a. Oszacuj błędy przybliżeń dla obu metod i porównaj wyniki.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces-pacjent jest chory, $p = 0.01$,
  S_n to liczba sukcesów w n próbach, czyli liczba chorych wśród badanych osób,
  $n = 200$.
- Mamy oszacować $P(S_n \geqslant 3)$.
- $n = 200 \geqslant 50$, $p = 0.01 \leqslant 0.1$ oraz $np = 2 \leqslant 10$, zatem uzasadnione jest skorzystanie z metody przybliżenia Poissona. Otrzymujemy

  $P(S_n \geqslant 3) = 1 - P(S_n = 0) - P(S_n = 1) - P(S_n = 2) \approx 1 - p_0 - p_1 - p_2 =$
  $= 1 - 0.1353 - 0.2707 - 0.2707 = 0.3233;$

  gdzie p_k odczytane z tablic rozkładu Poissona z $\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$.
  Błąd przybliżenia nie przekracza $np^2 = 0.02$
- $n = 200$ jest dość duże, więc możemy także użyć metody przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a. Otrzymujemy

  $P(S_n \geqslant 3) \approx 1 - \Phi\left(\frac{3-0.5-200\cdot 0.01}{\sqrt{200\cdot 0.01\cdot(1-0.01)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{1.98}}\right) \approx 1 - \Phi(0.36) =$

  $= 1 - 0.6406 = 0.3594$ z tablic standardowego rozkładu normalnego.

  Błąd przybliżenia nie przekracza $\frac{0.5(0.01^2+(1-0.01)^2)}{\sqrt{200\cdot 0.01\cdot(1-0.01)}} \approx 0.3483$
- Porównanie otrzymanych przybliżonych wartości prawdopodobieństwa, że wśród 200 osób prześwietlonych będzie nie mniej niż 3 chorych:

z tw. Poissona	z tw. Moivre'a-Laplace'a
0.3233 ± 0.02	0.3594 ± 0.3483

- Uwaga: Wynik dokładny otrzymany w Matlabie komendą `1-binocdf(2,200,0.01)` to 0.3233

(b) Partia $N = 250$ sztuk towaru zawiera $M = 18$ sztuk wadliwych. Wylosowano bez zwracania $n = 10$ sztuk. Partię odrzuca się, gdy w próbce znajdują się co najmniej 2 sztuki wadliwe. Znaleźć prawdopodobieństwo, że partia zostanie przyjęta. Oszacuj to prawdopodobieństwo na podstawie przybliżenia rozkładem Bernoulliego i przybliżenia rozkładem Poissona. Porównaj wyniki.

Rozwiązanie:

- $X_{(b)}$ - to ilość sztuk wadliwych w próbce. Partia zostanie przyjęta, gdy $\{X_{(b)} < 2\}$.
- Ze wzorów dokładnych otrzymujemy

  $P(X_{(b)} < 2) = P(X_{(b)} = 0) + P(X_{(b)} = 1) = \frac{\binom{18}{0}\binom{232}{10}}{\binom{250}{10}} + \frac{\binom{18}{1}\binom{232}{9}}{\binom{250}{10}} \approx 0.8438.$
- Obliczenie przybliżone z rozkładu Bernoulliego:

  $P(X_{(b)} < 2) \approx \binom{10}{0}\left(\frac{18}{250}\right)^0\left(1 - \frac{18}{250}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{18}{250}\right)^1\left(1 - \frac{18}{250}\right)^9 \approx 0.8412.$
- Obliczenie przybliżone z rozkładu Poissona:

  $P(X_{(b)} < 2) \approx e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 1,72e^{-0,72} \approx 0.8372$, gdzie parametr $\lambda = 10 \cdot \frac{18}{250} = 0.72$

Porównanie otrzymanych wartości $P(X_{(b)} < 2)$:

wzory dokładne	przybliżenie z rozkładu Bernoulliego	przybliżenie z rozkładu Poissona
0.8438	0.8412	0.8372

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz