Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Wykładowca: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Wykład 13: Rozkłady stabilne.

Zagadnienie ogólne:

Kiedy istnieją takie ciągi stałych $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, że $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, gdzie Y ma pewien właściwy (tzn. nie jednopunktowy) rozkład? I jaki jest ten rozkład?

Zagadnieniem tym zajmuje się **teoria rozkładów stabilnych** (lata 20-te, 30-te XX w., P. Lévy, A.J. Chinczyn)

Definicja rozkładów stabilnych za pomocą funkcji charakterystycznej:

Rozkłady stabilne to rozkłady o funkcji charakterystycznej postaci:

$$\varphi_{\alpha,\beta,m,c}(t) = \exp\{imt - |ct|^\alpha(1 - i\beta l(t))\},$$

gdzie

$$l(t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(t)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ -\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$$

oraz $0 < \alpha \leqslant 2$, $|\beta| \leqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, $c > 0$

przy czym $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0, \\ -1 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$

Rozkład stabilny o funkcji charakterystycznej $\varphi_{\alpha,\beta,m,c}(t)$ oznaczać będziemy $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$.

Podstawowa cecha rozkładów stabilnych:

Jeżeli zmienne losowe Y_1 i Y_2 są niezależne i mają taki sam rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ jak zmienna losowa Y, to dla dowolnych stałych $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \overset{d}{=} \lambda Y + \delta$$

dla pewnych stałych $\lambda > 0$, δ (zależnych od λ_1 i λ_2).

Rozkłady stabilne to jedyne rozkłady o tej własności.

Ponadto, stała λ ma postać $\lambda = (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha)^{1/\alpha}$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

PARAMETRY ROZKŁADU STABILNEGO $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$:

- Parametr kształtu α, zwany **indeksem stabilności**:
  $0 < \alpha \leqslant 2$,
  $\alpha = 2$ odpowiada rozkładowi normalnemu $\mathcal{N}\left(m, c\sqrt{2}\right)$

- **Parametr skośności** β:
  $|\beta| \leqslant 1$
  Dla $\beta = 0$ rozkład jest symetryczny,
  dla $\beta > 0$ rozkład jest skupiony bardziej na półprostej dodatniej,
  dla $\beta < 0$ rozkład jest skupiony bardziej na półprostej ujemnej

  W przypadku rozkładu normalnego $\alpha = 2$ i wtedy przy β we wzorze na funkcję charakterystyczną mamy $l(t) = 0$, a zatem funkcja ta zależy istotnie tylko od m i c; parametr β przestaje odgrywać rolę i pomijamy go.

- **Parametr przesunięcia** $m \in \mathbb{R}$

- **Parametr skali** $c > 0$:
  (nazwa nie jest w pełni uzasadniona, gdy $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, jak pokazuje poniższy fakt)

FAKT:

Niech Y ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha, \beta, 0, 1)$. Wtedy dla dowolnych stałych $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ zmienna losowa $cY + b$ ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z $m = \begin{cases} b & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ b - \dfrac{2\beta}{\pi} c \ln c & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}$

ROZKŁADY STABILNE JAKO JEDYNE MOŻLIWE WŁAŚCIWE ROZKŁADY GRANICZNE UNORMOWANYCH SUM NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH O JEDNAKOWYM ROZKŁADZIE:

TWIERDZENIE:

Dla ciągu X_1, $X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie istnieją ciągi stałych $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ oraz zmienna losowa Y o rozkładzie właściwym takie, że

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to \infty]{d} Y$$

(gdzie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$) wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma pewien **rozkład stabilny**, a rozkład zmiennych losowych X_i należy do **obszaru przyciągania tego rozkładu stabilnego**.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Gęstości rozkładów stabilnych:

Wszystkie rozkłady stabilne są rozkładami ciągłymi.

Jednak tylko dla trzech par parametrów α, β gęstość rozkładu stabilnego można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych (podajemy te gęstości dla $m = 0$ i pewnego ustalonego c, zaś wzory dla dowolnych m i $c > 0$ możemy otrzymać z Faktu ze str. 2):

- **rozkład normalny** $\mathcal{N}(0,1)$:

  $\alpha = 2$, β nieistotne, $m = 0$, $c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- **rozkład Cauchy'ego** $\mathcal{C}(0,1)$

  $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = 0$, $c = 1$

  $$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

- **rozkład Lévy'ego**

  $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 1$, $m = 0$, $c = 1$

  $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2x}} & \text{dla } \ x > 0, \\ 0 & \text{dla } \ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Własność „ciężkich” ogonów, momenty rozkładów stabilnych

Rozkłady stabilne z $\alpha < 2$ (czyli inne niż rozkład normalny) mają tzw. **„ciężkie” (in. „grube”) ogony**, tzn. dla Y o rozkładzie stabilnym $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z $\alpha < 2$ zachodzi przynajmniej jedna z własności:

$$P(Y \geqslant x) \sim x^{-\alpha}$$
$$P(Y \leqslant -x) \sim x^{-\alpha}.$$

przy $x \to \infty$.

Z własności ciężkich ogonów wynika, że dla Y o rozkładzie stabilnym $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z $\alpha < 2$ mamy

$$\mathrm{E}|Y|^p < \infty \iff p < \alpha.$$

W szczególności, wtedy $\mathrm{D}^2 Y = \infty$, a $\mathrm{E}Y$ istnieje tylko dla $\alpha > 1$.

W przypadku $\alpha = 2$, czyli gdy Y ma rozkład normalny, $\mathrm{E}|Y|^p$ istnieje dla dowolnego $p > 0$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Symetryczne rozkłady stabilne

Symetryczne rozkłady stabilne (tzn. o gęstości symetrycznej względem osi $0y$) otrzymujemy dla $\beta = 0$, $m = 0$, parametry $c > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$ - dowolne. Funkcja charakterystyczna takiego rozkładu ma wtedy prostszą postać

$$\varphi(t) = e^{-|ct|^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Całkowicie asymetryczne rozkłady stabilne

Rozkład stabilny jest całkowicie asymetryczny (tzn. o gęstości równej 0 na pewnej półprostej) jedynie dla $|\beta| = 1$, $0 < \alpha < 1$ (m i c - dowolne).

W szczególności, dla $\beta = 1$, $0 < \alpha < 1$, $m = 0$ i dowolnego $c > 0$ zmienna losowa Z o rozkładzie stabilnym $\mathcal{S}(\alpha, 1, 0, c)$ jest nieujemna z prawdopodobieństwem 1 (tzn. $P(Z \geqslant 0) = 1$).
Do opisu takiego rozkładu stabilnego wygodniej jest używać transformaty Laplace'a, która ma wtedy postać

$$\psi(t) = e^{-(ct)^\alpha / \cos(\pi\alpha/2)}, \quad t \geqslant 0.$$

Zmienne o takim rozkładzie stabilnym mogą służyć do przekształcanie jednej zmiennej stabilnej w drugą, nazywane są wtedy **stabilnymi subordynatorami**:

Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{S}(\gamma, 1, 0, 1)$ dla pewnego $0 < \gamma < 1$.
Dla zmiennej losowej Y o rozkładzie $\mathcal{S}(\alpha, \beta, 0, 1)$ z $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $|\beta| \leqslant 1$, niezależnej od Z, mamy

$$Z^{1/\alpha} Y \stackrel{d}{=} \begin{cases} c_1 Y_1, & \text{gdy } \alpha\gamma \neq 1, \\ c_1 Y_1 + m_1, & \text{gdy } \alpha\gamma = 1, \end{cases}$$

gdzie Y_1 ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(\alpha\gamma, \beta_1, 0, 1)$, gdy $\alpha\gamma \neq 1$,a rozkład $\mathcal{S}(1, 0, 0, 1)$, gdy $\alpha\gamma = 1$; natomiast parametry są postaci

$$\begin{aligned} c_1 &= (\cos(\gamma\Theta)/\cos(\pi\gamma/2))^{1/(\alpha\gamma)} \left(1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2(\pi\alpha/2)\right)^{1/(2\alpha)}, \\ \beta_1 &= \operatorname{tg}(\gamma\Theta)/\operatorname{tg}(\gamma\pi\alpha/2), \\ m_1 &= (\sin(\gamma\Theta)/\cos(\pi\gamma/2)) \left(1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2(\pi/(2\gamma))\right)^{\gamma/2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Theta = \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)).$$

Podobnie, dla zmiennej losowej Y o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$, niezależnej od Z, mamy

$$Z^{1/2} Y \stackrel{d}{=} c_2 Y_1,$$

gdzie Y_1 ma rozkład stabilny $\mathcal{S}(2\gamma, 0, 0, 1)$, a

$$c_2 = 2^{-1/2} (\cos(\pi\gamma/2))^{-1/(2\gamma)}$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Obszary przyciągania rozkładów stabilnych

Definicja:

Mówimy, że **rozkład $\mathcal{R}$ należy do obszaru przyciągania pewnego rozkładu stabilnego** $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$, jeżeli dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\mathcal{R}$ istnieją ciągi stałych $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, takie że

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y,$$

gdzie Y ma rozkład $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$.

Mówimy, że rozkład $\mathcal{R}$ należy do **normalnego** obszaru przyciągania pewnego rozkładu stabilnego $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$, jeżeli powyższy warunek zachodzi dla $b_n \propto n^{1/\alpha}$.

Twierdzenie (warunki konieczne i wystarczajace do przynależności do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego):

Rozkład $\mathcal{R}$ o dystrybuancie $F(x)$ należy do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z indeksem stabilności $\alpha < 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(-xy) + 1 - F(xy)}{F(-x) + 1 - F(x)} = y^{-\alpha}$$

przy czym istnieją granice

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - F(x)}{F(-x) + 1 - F(x)}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(-x)}{F(-x) + 1 - F(x)}$.

Warunki te oznaczają, że rozkład $\mathcal{R}$ ma asymptotycznie takie same ogony jak graniczny rozkład stabilny.

Rozkład $\mathcal{R}$ o dystrybuancie $F(x)$ należy do obszaru przyciągania rozkładu normalnego wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{\{|t|<xy\}} t^2 dF(t)}{\int\limits_{\{|t|<x\}} t^2 dF(t)} = 1.$$

Gdy wariancja rozkładu $\mathcal{R}$ jest skończona i większa od 0, warunek powyższy jest spełniony. Nie są to jednak warunki równoważne.

Jak widać, żeby stwierdzić, że rozkład należy do obszaru przyciągania pewnego rozkładu stabilnego, nie jest potrzebna szczegółowa wiedza o badanym rozkładzie, wystarczy znać asymptotyczne zachowanie się dystrybuanty w $\pm\infty$ (dla $\alpha < 2$) lub własność całkową (dla rozkładu normalnego).

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

TWIERDZENIE (WARUNKI KONIECZNE I WYSTARCZAJACE DO PRZYNALEŻNOŚCI DO NORMALNEGO OBSZARU PRZYCIĄGANIA ROZKŁADU STABILNEGO):

Rozkład $\mathcal{R}$ o dystrybuancie $F(x)$ należy do normalnego obszaru przyciągania rozkładu stabilnego $\mathcal{S}(\alpha, \beta, m, c)$ z indeksem stabilności $\alpha < 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $c_0 > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(-x) + 1 - F(x)}{(x/c_0)^{-\alpha}} = 1$$

oraz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{F(-x) + 1 - F(x)} = \frac{1+\beta}{2}.$$

Wówczas dla ciągu $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\mathcal{R}$ mamy

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y,$$

gdzie Y ma rozkład $\mathcal{S}(\alpha, \beta, 0, 1)$, dla

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ \alpha < 1, \\ n\mathrm{E}X_i, & \text{gdy } \ 1 < \alpha < 2, \\ n^2(\pi/2)c_0\mathrm{E}\sin(2X_i/(\pi c_0 n)), & \text{gdy } \ \alpha = 1, \end{cases}$$

oraz

$$b_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha} c_0 n^{1/\alpha}, & \text{gdy } \ \alpha \neq 1, \\ (\pi/2)c_0 n, & \text{gdy } \ \alpha = 1. \end{cases}$$

Rozkład zmiennej losowej X_i należy do normalnego obszaru przyciągania rozkładu normalnego, wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \mathrm{D}^2X_i = \sigma^2 < \infty$.

Wówczas $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, gdzie Y ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, dla $a_n = n\mathrm{E}X_i$ oraz $b_n = \sigma\sqrt{n}$ (jak w CTG Lindeberga-Lévy'ego).

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przypadek, gdy X_i jest nieujemną zmienną losową:

Gdy $F(0) = 0$, warunki należenia do normalnego obszaru przyciągania rozkładu stabilnego jeszcze się upraszczają:

pierwszy z nich przyjmuje postać

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{(x/c_0)^{-\alpha}} = 1 \tag{1}$$

a drugi warunek jest zawsze spełniony z $\beta = 1$ (co oznacza, że rozkład nieujemnej zmiennej losowej może należeć do obszaru przyciągania jedynie takiego rozkładu stabilnego, dla którego $\beta = 1$).
Rozkłady ciągłe spełniające warunek (1) z pewnym $\alpha > 0$, lub równoważnie o gęstości $f(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$ dla dużych x, nazywane są **rozkładami typu Pareto** i pojawiają się często w fizyce, ekonomii, biologii.

Przykłady rozkładów z $F(0) = 0$ należących do normalnego obszaru przyciagania rozkładu stabilnego z $\beta = 1$

(rozkłady typu Pareto z $0 < \alpha < 2$):

- **rozkład Pareto** z parametrami $\alpha > 0$, $A > 0$, o ile $0 < \alpha < 2$.
  Jest to rozkład o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1}{(1+Ax)^\alpha}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$

- **rozkład Burra** z parametrami $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $A > 0$, o ile $0 < \alpha\tau < 2$.
  Jest to rozkład o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1}{(1+(Ax)^\tau)^\alpha}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$

- **rozkład max-stabilny II typu** z parametrami $\alpha > 0$, $A > 0$, o ile $0 < \alpha < 2$.
  Jest to rozkład o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0, \\ e^{-(Ax)^{-\alpha}}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz