**Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332**
Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana
Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

# Wykład 1: Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo klasyczne. Prawdopodobieństwo geometryczne.

## Definicja.

**Przestrzenią probabilistyczną** nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie

(a) $\Omega$ to pewien niepusty zbiór;

(b) $\mathcal{F}$ to pewna rodzina podzbiorów zbioru $\Omega$ o własnościach

- $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$;

(c) $P$ to funkcja, $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$, o własnościach:

- $P(\Omega) = 1$ (unormowanie),
- dla $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, parami rozłącznych (tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (przeliczalna addytywność).

$\Omega$ zwany jest **zbiorem zdarzeń elementarnych** lub **przestrzenią stanów**,
$\mathcal{F}$ to **$\sigma$-ciało zdarzeń losowych**, a funkcja $P$ zwana jest **prawdopodobieństwem**.

## Zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega$:

Elementy zbioru $\Omega$ nazywamy zdarzeniami elementarnymi i oznaczamy zwykle przez $\omega$. Można je interpretować jako możliwe wyniki pewnego doświadczenia. Stąd nazwa „przestrzeń stanów” dla $\Omega$.

## Rodzina zdarzeń losowych $\mathcal{F}$:

Operacje i działania na zdarzeniach losowych to operacje i działania na zbiorach. Jeżeli dla $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia $A, B$ **wykluczają się**. Dopełnienie zbioru $A \in \mathcal{F}$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do $A$. Zawsze $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$. $\emptyset$ nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**, a $\Omega$ **zdarzeniem pewnym**.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

## Własności prawdopodobieństwa wynikające z definicji:

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
3. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych parami rozłącznych zdarzeń losowych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zachodzi $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$
5. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ to nierosnący ciąg zdarzeń losowych , tzn. $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego $n$, to
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
7. Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ to niemalejący ciąg zdarzeń losowych , tzn. $A_n \subset A_{n+1}$ dla każdego $n$, to
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i stąd $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$
9. Dla dowolnego ciagu zdarzeń losowych $A_1, A_2, \ldots$ zachodzi $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

## Przykłady przestrzeni probabilistycznych:

- Trywialna przestrzeń probabilistyczna: $\Omega \neq \emptyset$ - dowolny, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
- Skończona przestrzeń stanów: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ - zbiór **skończony**,
  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\Omega$,
  każde prawdopodobieństwo $P$ można wtedy skonstruować w następujący sposób:

  1. wybieramy liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ spełniające warunki $p_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,
  2. definiujemy $P(\{\omega_i\}) := p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

  Z własności prawdopodobieństwa mamy wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$
  $$P(A) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i,$$
  np. dla $A = \{\omega_2, \omega_5\}$ mamy $P(A) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_5\}) = p_2 + p_5$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Przypadek szczególny - **prawdopodobieństwo klasyczne**:
$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$. Wtedy

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

gdzie $\#A$ oznacza liczność zbioru $A$. Innymi słowy, $P(A)$ to częstość występowania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$ w zbiorze $\Omega$ wszystkich zdarzeń elementarnych. Do określania liczności zbiorów stosujemy **kombinatorykę**.
Podstawowe wzory kombinatoryczne:
$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ - nieuporządkowana $k$-tka elementów zbioru $n$-elementowego (kombinacja).
Ilość **nieuporządkowanych $k$-tek bez powtórzeń** wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ilość **nieuporządkowanych $k$-tek z powtórzeniami** wynosi

$$\binom{n+k-1}{k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ - uporządkowana $k$-tka elementów zbioru $n$-elementowego (wariacja).
Ilość **uporządkowanych $k$-tek bez powtórzeń** wynosi

$$\frac{n!}{(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

(Uporządkowana $n$-ka bez powtórzeń zwana jest permutacją, ilość permutacji wynosi $n!$.)
Ilość **uporządkowanych $k$-tek z powtórzeniami** wynosi

$$n^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

- Przeliczalna przestrzeń stanów: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ - zbiór **nieskończony, przeliczalny**,
  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\Omega$,
  każde prawdopodobieństwo $P$ można wtedy skonstruować w następujący sposób:

  1. wybieramy ciąg liczbowy $p_1, p_2, \ldots$ spełniający warunki $p_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots$, oraz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
  2. definiujemy $P(\{\omega_i\}) := p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$.

  Z własności prawdopodobieństwa mamy wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$

  $$P(A) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i,$$

  np. dla $A = \{\omega_3, \omega_6, \ldots\}$ mamy $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\{\omega_{3k}\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{3k}$.

- Nieprzeliczalna przestrzeń stanów: $\Omega$ - zbiór **nieskończony, nieprzeliczalny**,
  $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, na ogół nie są to wszystkie podzbiory zbioru $\Omega$,
  nie ma prostego przepisu na określenie prawdopodobieństwa $P$, dużo zależy od postaci zbioru $\Omega$.

  Szczególny przypadek - **prawdopodobieństwo geometryczne**:

  Def. **Zbiory borelowskie** w $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) to najmniejsza rodzina podzbiorów prostej (płaszczyzny, przestrzeni) o własnościach rodziny $\mathcal{F}$, która zawiera przedziały (koła, kule).

  $\Omega \subset \mathbb{R}$- zbiór borelowski o skończonej i niezerowej długości np. przedział, $\mathcal{F}$ to podzbiory borelowskie zbioru $\Omega$.
  Definiujemy dla $A \in \mathcal{F}$

  $$P(A) = \frac{\text{długość } A}{\text{długość } \Omega}.$$

  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$- zbiór borelowski o skończonym i niezerowym polu, $\mathcal{F}$ to podzbiory borelowskie zbioru $\Omega$.
  Definiujemy dla $A \in \mathcal{F}$

  $$P(A) = \frac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega}.$$

  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$- zbiór borelowski o skończonej i niezerowej objętości, $\mathcal{F}$ to podzbiory borelowskie zbioru $\Omega$.
  Definiujemy dla $A \in \mathcal{F}$

  $$P(A) = \frac{\text{objętość } A}{\text{objętość } \Omega}.$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz