

Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

WYKŁAD 8: DZIAŁANIA NA ZMIENNYCH LOSOWYCH NIEZALEŻNYCH

SUMA NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH.

X i Y to niezależne zmienne losowe odpowiednio o dystrybuantach $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.
Wówczas $Z = X + Y$ ma rozkład o dystrybuancie

$$F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) dF_Y(y).$$

Jest to tzw. **splot dystrybuant (miar)**.

Jeśli X i Y mają rozkłady ciągłe o gęstościach odpowiednio $f_X(x)$ i $f_Y(y)$,
to $Z = X + Y$ też ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = (f_X * f_Y)(z).$$

Jest to tzw. **splot gęstości**.

Na ogół wyznaczenie splotu jest technicznie trudne. Gdy znamy postać analityczną funkcji charakterystycznych rozkładów X i Y , to możemy posłużyć się inną metodą:

FAKT: Jeśli X i Y to niezależne zmienne losowe o funkcjach charakterystycznych odpowiednio $\varphi_X(t)$, $\varphi_Y(t)$, to wówczas dla każdego t

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

(Analogiczną własność mają transformata Laplace'a i funkcja tworząca.)

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

MINIMUM I MAKSIMUM NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH LOSOWYCH.

X i Y to niezależne zmienne losowe odpowiednio o dystrybuantach $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.
Wówczas zmienna losowa

$$Z = \min(X, Y)$$

ma rozkład o dystrybuancie

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

UZASADNIENIE:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\min(X, Y) < z) = 1 - P(\min(X, Y) \geq z) = 1 - P(X \geq z, Y \geq z) = \\ &\stackrel{\text{niezal.}}{=} 1 - P(X \geq z)P(Y \geq z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)). \end{aligned}$$

Podobnie zmienna losowa

$$Z_1 = \max(X, Y)$$

ma rozkład o dystrybuancie

$$F_{Z_1}(z) = F_X(z)F_Y(z).$$

UZASADNIENIE:

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z) &= P(\max(X, Y) < z) = P(X < z, Y < z) \stackrel{\text{niezal.}}{=} P(X < z)P(Y < z) = \\ &= F_X(z)F_Y(z). \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy X i Y mają jednakowy rozkład o dystrybuancie F , to

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^2,$$

$$F_{Z_1}(z) = (F(z))^2.$$

Ogólnie, dla n niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n o jednakowym rozkładzie o dystrybuancie F zmienne losowe

$$Z = \min(X_1, \dots, X_n) \text{ i } Z_1 = \max(X_1, \dots, X_n)$$

mają rozkłady o dystrybuantach odpowiednio

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^n,$$

$$F_{Z_1}(z) = (F(z))^n.$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz