Wykład 9: Różne rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych. Prawa wielkich liczb.

Zbieżność z prawdopodobieństwem 1:

Definicja:

Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ jest **zbieżny z prawdopodobieństwem 1** (in. **prawie na pewno**) do zmiennej losowej X, jeżeli

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.n.} X$, $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ z prawd. 1.

Uwaga:

Ciąg zbieżny punktowo jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1.

(Ciąg $X_1, X_2, \ldots$ jest **zbieżny punktowo** do X, jeżeli $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\ \forall\ \omega \in \Omega$.)

Zbieżność stochastyczna:

Definicja:

Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ jest **zbieżny stochastycznie** (in. **według prawdopodobieństwa**) do zmiennej losowej X, jeżeli

$$\bigwedge_{\epsilon>0} P(|X_n - X| \geqslant \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, $P-\lim_{n\to\infty} X_n = X$.

Fakt:

(a) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

(b) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, to istnieje podciąg (X_{k_n}) ciagu (X_n), taki że $X_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$.

Zbieżność względem momentów rzędu r:

Definicja:

Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$ $\mathrm{E}|X_n|^r$, $\mathrm{E}|X|^r$ są skończone dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ jest **zbieżny względem momentów rzędu** r (in. **w przestrzeni** L^r) do zmiennej losowej X, jeżeli

$$\mathrm{E}|X_n - X|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} X$.

Dla $r = 2$ mówimy, że ciąg (X_n) jest **zbieżny średniokwadratowo** do X.

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{śr.kw.} X$, $\mathrm{l.i.m.} X_n = X$.

Fakt:

Dla dowolnego ustalonego $r_0 > 0$:

(a) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^{r_0}} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

(b) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^{r_0}} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} X$ dla każdego $0 < r < r_0$.

Zbieżność według rozkładu:

Definicja:

Niech X_n ma rozkład o dystrybuancie $F_n(x)$, a X - rozkład o dystrybuancie $F(x)$.
Ciąg zmiennych losowych X_1, $X_2, \ldots$ jest **zbieżny według rozkładu** (in. **słabo zbieżny**) do zmiennej losowej X, jeżeli

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

dla każdego takiego x, w którym $F(x)$ jest ciągła.

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} F$.

Fakt:

(a) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

(b) Gdy $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, gdzie $P(X = a) = 1$ dla pewnej stałej a, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

(c) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

(d) Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} X$, to $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Twierdzenie Lévy'ego:

1. Niech zmienne losowe X_n, X mają rozkłady o funkcjach charakterystycznych odpowiednio $\varphi_n(t)$, $\varphi(t)$.
   Jeżeli $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, to $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$ dla każdego t.

2. Niech X_n ma rozkład o funkcji charakterystycznej $\varphi_n(t)$.
   Jeżeli $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$ dla każdego t i graniczna funkcja $\varphi(t)$ jest ciągła w $t = 0$, to $\varphi(t)$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X oraz $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Uwaga:

W zbieżnościach z prawdopodobieństwem 1, stochastycznej, w przestrzeni L^r graniczna zmienna losowa X jest określona z prawdopodobieństwem 1, tzn. jeżeli X' i X'' są granicami ciągu X_n, to $P(X' = X'') = 1$.

W zbieżności słabej określony jest tylko rozkład graniczny danego ciagu i każda zmienna losowa X o takim rozkładzie może reprezentować słabą granicę tego ciągu.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Prawa wielkich liczb (PWL)

Prawo wielkich liczb Bernoulliego, twierdzenie Borela:

Niech S_n będzie liczbą sukcesów w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Wtedy zachodzi

- **PWL Bernoulliego** (XVII/XVIII w.) (SPWL)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p.$$

- **twierdzenie Borela** (pocz. XX w.) (MPWL)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} p.$$

Interpretacja:

Częstość występowania sukcesu w n próbach Bernoulliego przybliża przy dużym n prawdopodobieństwo p sukcesu w pojedynczej próbie. Odpowiada to obserwacjom z natury, że częstość zdarzenia losowego stabilizuje się na pewnym poziomie.

Definicja ogólna:

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o skończonych wartościach oczekiwanych $\mathrm{E}X_n = m_n$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $a_n = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Mówimy, że ciąg (X_n) spełnia **słabe prawo wielkich liczb (SPWL)**, gdy

$$\frac{S_n - a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Mówimy, że ciąg ten spełnia **mocne prawo wielkich liczb (MPWL)**, gdy

$$\frac{S_n - a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} 0.$$

Oczywiście MPWL $\Longrightarrow$ SPWL.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

PWL dla ciągów zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

Twierdzenie Chinczyna

Niech (X_n) będzie ciągiem **niezależnych** zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym $\mathrm{E}|X_n| < \infty$. Wtedy ciąg ten spełnia SPWL, które w tym przypadku można zapisać w postaci

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} m = \mathrm{E}X_1.$$

MPWL Kołmogorowa

Niech (X_n) będzie ciągiem **niezależnych** zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Ciąg ten spełnia MPWL, które w tym przypadku można zapisać w postaci

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} m = \mathrm{E}X_1.$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{E}|X_n| < \infty$.

Szczególny przypadek: twierdzenie Borela, a w konsekwencji PWL Bernoulliego, gdyż jeżeli (X_n) to ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zerojedynkowym $\mathcal{B}(1,p)$, tzn. $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$, to S_n ma rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(n,p)$, taki jak rozkład ilości sukcesów w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $m = \mathrm{E}X_1 = p$.

PWL dla ciągów zmiennych losowych o różnych rozkładach

Twierdzenie Czebyszewa

Niech (X_n) będzie ciągiem **parami niezależnych** zmiennych losowych, dla których dla każdego n istnieje wariancja $\mathrm{D}^2X_n < \infty$, przy czym dla pewnego c $\mathrm{D}^2X_n \leqslant c < \infty$ dla wszystkich n. Wtedy ciąg ten spełnia SPWL.

Twierdzenie Markowa

Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, takim że

$$\frac{\mathrm{D}^2S_n}{n^2} = \frac{\mathrm{D}^2(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(Oczywiście zakładamy, że wariancja ta istnieje.) Wtedy ciąg ten spełnia SPWL.

Twierdzenie Kołmogorowa

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, takich że istnieje wariancja $\mathrm{D}^2X_n < \infty$. Jeżeli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2X_n}{n^2} < \infty,$$

to ciąg ten spełnia MPWL.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Ważne zastosowania PWL:

Metoda Monte Carlo obliczania całek oznaczonych:

Niech $X_1, X_2, \ldots X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[a,b]$ oraz niech f będzie funkcją rzeczywistą taką, że $\mathrm{E}f(X_1)$ istnieje i jest skończona.
Przy powyższych założeniach $f(X_1), f(X_2), \ldots f(X_n)$ jest także ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym istnieje wartość oczekiwana $\mathrm{E}f(X_1)$.

Ponadto $\mathrm{E}f(X_1) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Z MPWL Kołmogorowa mamy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} \mathrm{E}f(X_1) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Możemy zatem do obliczania przybliżonej wartości całki oznaczonej $\int\limits_a^b f(x)dx$ zastosować następujący algorytm:

(a) losujemy niezależnie liczby $u_1, u_2, \ldots, u_n$ z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}[0,1]$;

(b) przekształcamy $x_k = a + (b-a)u_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ otrzymując w ten sposób próbkę z rozkładu $\mathcal{U}(a,b)$;

(c) jako przybliżoną wartość całki przyjmujemy $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Dystrybuanta empiryczna:

Rozważmy ciąg $X_1, X_2, \ldots X_n$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie opisanym dystrybuantą $F(x)$. Ciąg ten interpretujemy jako opis wyników n niezależnych pomiarów pewnej wielkości fizycznej X, dokonywanych w tych samych warunkach fizycznych. Wartości $x_1, x_2, \ldots x_n$ zmiennych losowych w tym ciągu to wyniki konkretnych takich pomiarów. Ciąg $X_1, X_2, \ldots X_n$ nazywamy próbą prostą.

Niech $S_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n)$ oznacza ilość elementów próby prostej, których wartość jest mniejsza niż x.

$F_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n) = \dfrac{S_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n)}{n}$ (albo $F_n(x; x_1, x_2, \ldots x_n)$) nazywamy **dystrybuantą empiryczną**.

Zauważmy, że $S_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n)$ oznacza ilość tych X_i, których wartość jest mniejsza niż x. Jest to zatem ilość sukcesów w n próbach Bernoulliego, gdzie sukces w $i$tej próbie to zdarzenie $\{X_i < x\}$ i $p = P(X_i < x) = F(x)$ niezależnie od i.
Zatem $S_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n)$ ma rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(n, p = F(x))$.
Z tw. Borela otrzymujemy, że

$$F_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n) = \frac{S_n(x; X_1, X_2, \ldots X_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{z\,pr.1} p = F(x).$$

Inaczej mówiąc, dla dużych n, dla prawie każdej wartości $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wektora losowego $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ mamy $F_n(x; x_1, x_2, \ldots x_n) \approx F(x)$, czyli dystrybuanta empiryczna jest w przybliżeniu równa dystrybuancie teoretycznej F.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz