Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

WYKŁAD DODATKOWY: CAŁKOWANIE W SENSIE LEBESGUE'A.

Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ.

DEFINICJA: Dla pewnego ustalonego $n \in \mathbb{N}$ niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi, a $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{F}$ będą parami rozłączne. Funkcję

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{1}_{E_j}(x), \quad x \in \mathcal{X}, \tag{1}$$

nazywamy **funkcją prostą na $\mathcal{X}$** (w przedstawieniu kanonicznym).

DEFINICJA (CAŁKA LEBESGUE'A Z FUNKCJI PROSTEJ):

Weźmy f postaci (1). Załóżmy, że $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) < \infty$. Wtedy **całkę Lebesgue'a z funkcji prostej f względem miary μ** definiujemy jako

$$\int f d\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Ponadto dla dowolnego $E \in \mathcal{F}$ definiujemy:

$$\int_E f d\mu := \int f \mathbb{1}_E d\mu.$$

DEFINICJA (CAŁKA LEBESGUE'A Z OGRANICZONEJ FUNKCJI $\mathcal{F}$-MIERZALNEJ NA ZBIORZE O SKOŃCZONEJ MIERZE μ):

Niech f będzie funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną określoną na zbiorze $E \in \mathcal{F}$ takim, że $\mu(E) < \infty$. Dodatkowo niech f będzie funkcją ograniczoną na E, tzn.

$$\exists\, M > 0 \ \forall\, x \in E \ \ |f(x)| < M.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy ciąg $-M = b_0 < b_1 < \ldots < b_n = M$ taki, że $\varepsilon_i := b_i - b_{i-1} < \varepsilon$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Podzielmy przedział $[-M, M)$ na części postaci $J_i = [b_{i-1}, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Mamy oczywiście $|J_i| = \varepsilon_i < \varepsilon$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Definiujemy **dolną i górną funkcję prostą dla f** jako odpowiednio:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} \mathbb{1}_{f^{-1}(J_i)}(x); \\ \psi(x) &:= \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{f^{-1}(J_i)}(x). \end{aligned}$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Mamy $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ oraz

$$\int_E (\psi - \varphi) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mu(f^{-1}(J_i)) \leqslant \varepsilon \mu(E).$$

Stąd możemy zdefiniować **całkę Lebesgue'a z funkcji f na zbiorze E względem miary** μ (gdzie $\mu(E) < \infty$) jako:

$$\int_E f d\mu := \inf_{\psi} \int_E \psi d\mu.$$

lub równoważnie,

$$\int_E f d\mu := \sup_{\varphi} \int_E \varphi d\mu.$$

Całka ta jest dobrze określona dla dowolnej $\mathcal{F}$-mierzalnej funkcji f ograniczonej na E.

WŁASNOŚCI CAŁKI LEBESGUE'A:

(1) dla dowolnej stałej c mamy $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$

(2) $\int_E (f_1 + f_2) d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu$

(3) Jeżeli $f \geqslant 0$ μ-p.w.[1], to $\int_E f d\mu \geqslant 0$.

(4) Jeżeli $f_1, f_2, \ldots$ to ciąg funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych na E, przy czym $\exists\, M > 0 \ \forall\, n \ |f_n| \leqslant M$ oraz $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-p.w., to

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

UWAGA:

Jeżeli $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m_L)$, $E = [a, b]$ i f jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\int_E f dm_L = \int_a^b f(x) dx$ (ta ostatnia to znana nam całka Riemanna).

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

[1] Mówimy, że dany warunek dla funkcji zachodzi μ-p.w., gdy $\mu(\{x : \text{warunek nie zachodzi }\}) = 0$. Np. $f \geqslant 0$ μ-p.w. oznacza, że $\mu(\{x : f(x) < 0\}) = 0$.

Definicja (całka Lebesgue'a z nieujemnej funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnej względem miary σ-skończonej):

Niech μ będzie miarą σ-skończoną na $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, a f funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną określoną na zbiorze $E \in \mathcal{F}$, przy czym $f \geqslant 0$. Wtedy definiujemy

$$\int_E f d\mu := \sup_h \int_E h d\mu,$$

gdzie kres górny jest brany po funkcjach h, które są $\mathcal{F}$-mierzalne, ograniczone na E, takie że $0 \leqslant h \leqslant f$ oraz $\mu(\{h \neq 0\}) = 0$.

Uwaga: Powyższa całka ma własności (1)-(4), włączając przypadki, gdy kres górny jest równy ∞.

Lemat Fatou:

Niech $f_1, f_2, \ldots$ będą $\mathcal{F}$-mierzalne, określone na $E \in \mathcal{F}$, przy czym $f_n \geqslant 0 \ \forall\, n$. Wtedy

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej:

Niech $f_1, f_2, \ldots$ będzie niemalejącym ciągiem funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych, określonych na $E \in \mathcal{F}$, przy czym $f_n \geqslant 0 \ \forall\, n$. Wówczas, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-p.w., to $\int\limits_E f_n d\mu \nearrow \int\limits_E f d\mu$.

Definicja:

Mówimy, że **funkcja** $f \geqslant 0$, $\mathcal{F}$-mierzalna, jest **całkowalna na** $E \in \mathcal{F}$, gdy $\int\limits_E f d\mu < \infty$.

Całka Lebesgue'a z dowolnej funkcji:

Oznaczmy $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\}$. Wtedy $f = f^+ - f^-$ oraz $f^+ \geqslant 0$, $f^- \geqslant 0$.

Jeżeli obie, f^+ i f^- są całkowalne na E, to mówimy, że f jest całkowalna na E i definiujemy

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Twierdzenie o zbieżności ograniczonej:

Niech g będzie funkcją całkowalną na E oraz niech $f_1, f_2, \ldots$ będą $\mathcal{F}$-mierzalne, określone na $E \in \mathcal{F}$ i takie, że $|f_n| \leqslant g \ \forall\, n$. Wówczas, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-p.w., to

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz