Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Wykład dodatkowy: Konstrukcja miary Lebesgue'a

Dla przedziału $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ w naturalny sposób przyjmujemy, że długość I to

$$\ell(I) = b - a.$$

Definicja: Niech A będzie dowolnym podzbiórem $\mathbb{R}$. Definiujemy

$$m^*(A) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$

po wszystkich przeliczalnych rodzinach przedziałów otwartych $I_1, I_2, \ldots$ takich, że $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_N$. Funkcję $m^* : 2^{\mathbb{R}} \longmapsto [0, \infty]$ nazywamy **miarą zewnętrzną Lebesgue'a**.

Własności m^*:

1. $A \subset B \subset \mathbb{R} \Longrightarrow m^*(A) \leqslant m^*(B)$;
2. $m^*(\emptyset) = 0$, $m^*(\{a\}) = 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$;
3. $\forall\ A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R} \quad \forall\ s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad m^*\left(\bigcup_{n=1}^{s} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{s} m^*(A_n)$;
4. jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalny, to $m^*(A) = 0$;
5. $m^*(I) = \ell(I)$ dla dowolnego przedziału I (także nieograniczonego).

Zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a

Definicja: Mówimy, że **zbiór** $E \subset \mathbb{R}$ **jest mierzalny w sensie Lebesgue'a**, gdy

$$\forall\ A \subset \mathbb{R} \quad m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Oznaczmy przez $\mathfrak{M}$ rodzinę podzbiorów prostej $\mathbb{R}$, które są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

TWIERDZENIE: Jeżeli $m^*(E) = 0$, to $E \in \mathfrak{M}$.

Dowód: Weźmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}$. Z własności 3. i z własności 1. mamy

$$m^*(A \setminus E) \leqslant m^*(A) \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E),$$

ponieważ $A \setminus E \subset A$ oraz $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$. Ponadto $A \cap E \subset E$, więc z własności 1. i z założenia twierdzenia otrzymujemy

$$0 \leqslant m^*(A \cap E) \leqslant m^*(E) = 0 \Longrightarrow m^*(A \cap E) = 0.$$

W konsekwencji

$$m^*(A) = m^*(A \setminus E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \square$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że $\mathfrak{M}$ nie jest rodziną pustą, bo zawiera np. zbiory przeliczalne.

TWIERDZENIE:

(1) $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem (tzn. $\emptyset \in \mathfrak{M}$; jeżeli $E \in \mathfrak{M}$, to $E^c = \mathbb{R} \setminus E \in \mathfrak{M}$; oraz jeżeli $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, to $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$).

(2) $\mathfrak{M} \supsetneq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ - σ-ciało borelowskich podzbiorów prostej $\mathbb{R}$
(innymi słowy, każdy zbiór borelowski jest mierzalny w sensie Lebesgue'a oraz istnieje zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a, który nie jest borelowski).

(3) $\mathfrak{M} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$
(innymi słowy, istnieje podzbiór prostej, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a).

MIARA LEBESGUE'A NA PROSTEJ $\mathbb{R}$

Funkcja m^* ograniczona do dziedziny $\mathfrak{M}$ to **miara Lebesgue'a** na $\mathbb{R}$, oznaczana przez m_L

$$m^*\Big|_{\mathfrak{M}} = m_L$$

TWIERDZENIE: Jeżeli $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ są parami rozłączne, to

$$m_L\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_L(E_n).$$

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz