Rachunek prawdopodobieństwa MAT1332

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Wykład dodatkowy: Ogólna definicja przestrzeni mierzalnej. Funkcje mierzalne.

Definicja: Niech $\mathcal{X}$ będzie dowolnym zbiórem niepustym, a $\mathcal{F} \subset 2^{\mathcal{X}}$ pewnym σ-ciałem. Wtedy $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ nazywamy **przestrzenią mierzalną**.

Miarą na tej przestrzeni nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \longmapsto [0, \infty]$, taką że

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- dla dowolnych $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$, parami rozłącznych (tzn. $E_i \cap E_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (przeliczalna addytywność).

Trójkę $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ nazywamy **przestrzenią mierzalną z miarą** μ.

Uwaga:

1. Gdy $\mu(\mathcal{X}) < \infty$, mówimy, że miara μ jest **skończona**.

   W tym, gdy $\mu(\mathcal{X}) = 1$, mówimy, że μ jest **miarą probabilistyczną** ($\mu = P$).

2. Gdy $\mu(\mathcal{X}) = \infty$ i istnieją takie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots \in \mathcal{F}$, że $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ oraz $\mu(\mathcal{X}_n) < \infty \; \forall \, n$, mówimy, że miara μ jest **σ-skończona**.

   Przykładem takiej miary jest miara Lebesgue'a m_L.

3. Mówimy, że miara μ na $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ jest **zupełna**, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ z tego, że $A \subset B$ i $\mu(B) = 0$, wynika, że $\mu(A) = 0$.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

FUNKCJE MIERZALNE

DEFINICJA: Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Mówimy, że

$$f : \mathcal{X} \longmapsto \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

jest **funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną**, gdy

$$\forall \; B \in \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}} \quad \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in B\} = f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

($\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$ oznacza rodzinę borelowskich podzbiorów $\bar{\mathbb{R}}$.)

TWIERDZENIE: Następujące warunki są równoważne:

(1) Funkcja f jest $\mathcal{F}$-mierzalna.

(2) $\forall \; \alpha \in \mathbb{R} \quad \{x \in \mathcal{X} : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F}$.

(3) $\forall \; \alpha \in \mathbb{Q} \quad \{x \in \mathcal{X} : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F}$.

(4) $\forall$ zbioru otwartego $A \subset \bar{\mathbb{R}} \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

W warunkach (2) i (3) nierówność „$<$” można zastapić dowolną inną („$\leqslant, >, \geqslant$”).

UWAGA:

(a) Gdy $(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M})$, funkcję $\mathfrak{M}$-mierzalną nazywamy krótko funkcją mierzalną.

(b) Gdy $(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, funkcję $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mierzalną nazywamy funkcją borelowską.

(c) Funkcja borelowska jest mierzalna.

DEFINICJA: Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ, a f, g - funkcjami na $\mathcal{X}$. Mówimy, że funkcje f i g są równe μ-prawie wszędzie, co oznaczamy $f = g$ μ-p.w. (albo μ-a.s., od ang. *almost surely*), gdy $\mu(\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{f \neq g\}) = 0$.

TWIERDZENIE:

(1) Jeżeli f, g są funkcjami $\mathcal{F}$-mierzalnymi o wartościach rzeczywistych, a $c \in \mathbb{R}$ dowolną stałą, to $f + c$, cf, $f + g$, $f \cdot g$ są także $\mathcal{F}$-mierzalne.

(2) Jeżeli $f_1, f_2, \ldots$ są funkcjami $\mathcal{F}$-mierzalnymi o wartościach rzeczywistych, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcje $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\sup\{f_1, f_2, \ldots\}$, $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\inf\{f_1, f_2, \ldots\}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ są także $\mathcal{F}$-mierzalne.

(3) Jeżeli f jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną i $g = f$ μ-p.w., to g także jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną.

(4) Jeżeli f jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną o wartościach rzeczywistych, a $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to $F \circ f$ jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz

Miary absolutnie ciągłe i miary singularne względem innej miary

Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, a μ i ν to dwie miary na tej przestrzeni.

Definicja:

Mówimy, że ν **jest miarą absolutnie ciągłą względem miary** μ, gdy

$$\forall\ A \in \mathcal{F}\ \ \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Oznaczenie: $\nu \ll \mu$.

Definicja:

Mówimy, że **miary ν i μ są singularne (in. wzajemnie osobliwe)**, gdy

$$\exists\ A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0,\ \nu(\mathcal{X} \setminus A) = 0.$$

Oznaczenie: $\nu \perp \mu$.

Twierdzenie Radona-Nikodyma:

Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, a μ i ν to dwie miary σ-skończone na tej przestrzeni, przy czym $\nu \ll \mu$. Wtedy istnieje $\mathcal{F}$-mierzalna, nieujemna funkcja f na $\mathcal{X}$ taka, że

$$\forall\ E \in \mathcal{F}\ \ \nu(E) = \int\limits_E f d\mu.$$

(We wzorze mamy całkę Lebesgue'a - patrz kolejny wykład dodatkowy.)

Uwaga: Funkcja f nazywana jest gęstością miary ν względem miary μ. Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbioru miary (μ i ν) zero, tzn. jeżeli pewne funkcje f_1 i f_2 są gęstościami ν względem μ, to $f_1 = f_2$ μ-p.w. oraz ν-p.w.

Opracowanie: dr hab. Agnieszka Jurlewicz