



Politechnika Wroclawska

Błądzenie losowe punktu po prostej

Sebastian Chojnowski
II rok, Matematyka Stosowana,
Wydział Matematyki PWr
19.12.2016



Błądzenie punktu po prostej

Rozważmy punkt startujący z początku układu współrzędnych i poruszający się po prostej, przy czym przesuwa się o jednostkę w prawo z prawdopodobieństwem 0.5 i o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem 0.5.



Błądzenie punktu po prostej

Rozważmy punkt startujący z początku układu współrzędnych i poruszający się po prostej, przy czym przesuwa się o jednostkę w prawo z prawdopodobieństwem 0.5 i o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem 0.5.

Poszczególne przesunięcia są niezależne.



Błądzenie punktu po prostej

Rozważmy punkt startujący z początku układu współrzędnych i poruszający się po prostej, przy czym przesuwa się o jednostkę w prawo z prawdopodobieństwem 0.5 i o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem 0.5.

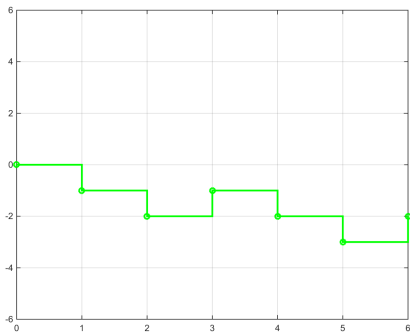
Poszczególne przesunięcia są niezależne.

Założmy, że punkt wykonuje 6 takich przesunięć.



Błądzenie punktu po prostej

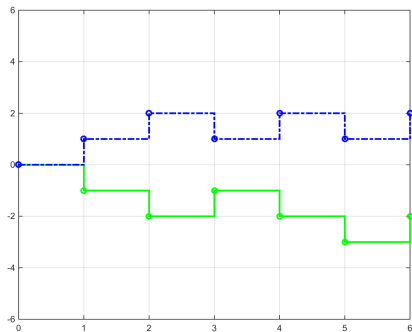
Poniższa wizualizacja przedstawia przykładowe ścieżki czterech takich punktów.





Błądzenie punktu po prostej

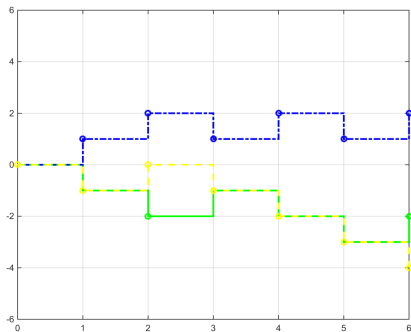
Poniższa wizualizacja przedstawia przykładowe ścieżki czterech takich punktów.





Błądzenie punktu po prostej

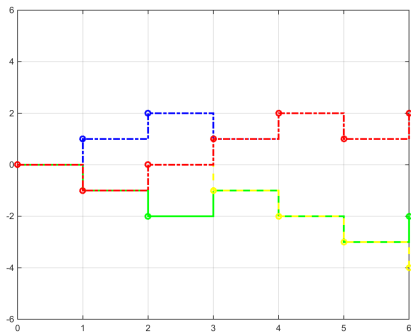
Poniższa wizualizacja przedstawia przykładowe ścieżki czterech takich punktów.





Błądzenie punktu po prostej

Poniższa wizualizacja przedstawia przykładowe ścieżki czterech takich punktów.





Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Niech Y będzie położeniem punktu po 6 przesunięciach.



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Niech Y będzie położeniem punktu po 6 przesunięciach.

Aby wyznaczyć rozkład Y , skorzystamy ze schematu Bernoulliego, gdzie sukcesem będzie ruch w prawo.

Wykonujemy 6 przesunięć.

Prawdopodobieństwo sukcesu to $p=0.5$.



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Niech Y będzie położeniem punktu po 6 przesunięciach.

Aby wyznaczyć rozkład Y , skorzystamy ze schematu Bernoulliego, gdzie sukcesem będzie ruch w prawo.

Wykonujemy 6 przesunięć.

Prawdopodobieństwo sukcesu to $p=0.5$.

Niech X oznacza ilość sukcesów w 6 próbach.

$$P(X = k) = \binom{6}{k} (0.5)^k (1 - 0.5)^{6-k} = \binom{6}{k} (0.5)^6$$

dla $k = 0, 1, \dots, 6$



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Niech Y będzie położeniem punktu po 6 przesunięciach.

Aby wyznaczyć rozkład Y , skorzystamy ze schematu Bernoulliego, gdzie sukcesem będzie ruch w prawo.

Wykonujemy 6 przesunięć.

Prawdopodobieństwo sukcesu to $p=0.5$.

Niech X oznacza ilość sukcesów w 6 próbach.

$$P(X = k) = \binom{6}{k} (0.5)^k (1 - 0.5)^{6-k} = \binom{6}{k} (0.5)^6$$

dla $k = 0, 1, \dots, 6$

$$Y = 1 \cdot X + (-1) \cdot (6 - X) = 2(X - 3)$$



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Obliczmy najpierw prawdopodobieństwo, że punkt wróci do miejsca startowego, tzn. że $Y = 0$ (czyli liczba sukcesów będzie równała się ilości porażek, co jest równoważne $X = 3$).

$$P(Y = 0) = P(X = 3) = \binom{6}{3}(0.5)^6 = \frac{20}{2^6} = 0.3125$$



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Teraz sprawdzimy prawdopodobieństwo otrzymania $Y = -2$ (czyli $X = 2$ sukcesów) oraz $Y = 2$ (czyli $X = 4$ sukcesów).
Mamy

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$$

Stąd $P(X = 2) = P(X = 4) = \frac{15}{2^6} = 0.234375$ i w konsekwencji

$$P(Y = -2) = P(Y = 2) = 0.234375$$



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Podobnie dla par $Y = -4$ ($X = 1$), $Y = 4$ ($X = 5$) oraz $Y = -6$ ($X = 0$), $Y = 6$ ($X = 6$) mamy

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6, \quad \binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$$

i w konsekwencji

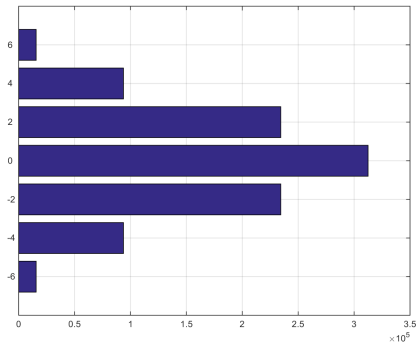
$$P(Y = -4) = P(Y = 4) = \frac{6}{2^6} = 0.09375$$

$$P(Y = -6) = P(Y = 6) = \frac{1}{2^6} = 0.015625$$



Rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach

Czyli w teorii otrzymujemy rozkład położenia punktu po 6 przesunięciach jak na poniższym histogramie.





Symulacje

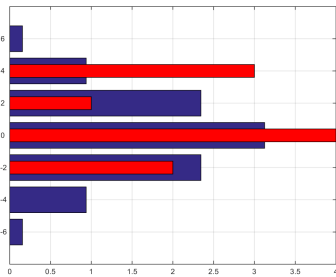
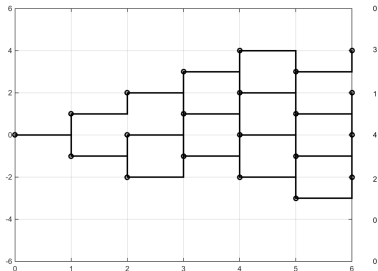
Na podstawie Prawa Wielkich Liczb rozkład teoretyczny będzie w przybliżeniu pokrywał się z częstością osiągnięcia danego położenia cząstki dla wielu realizacji takich ścieżek.

Zbadajmy, czy symulacje potwierdzą tę tezę.



Symulacje

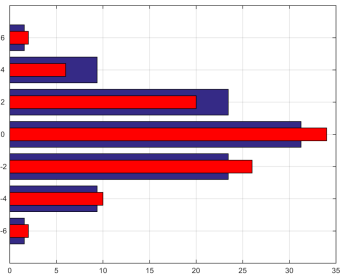
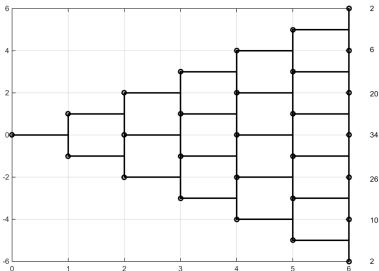
Ścieżki oraz histogram dla 10 prób.





Symulacje

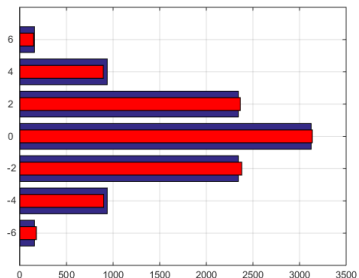
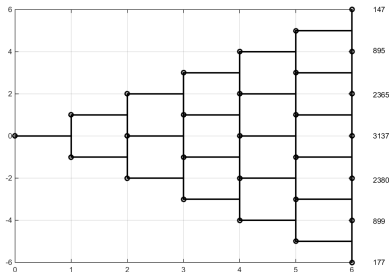
Ścieżki oraz histogram dla 100 prób.





Symulacje

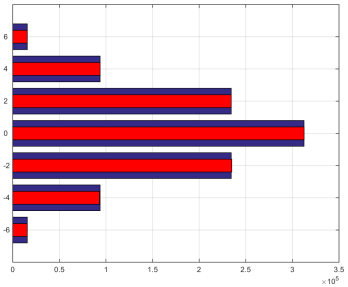
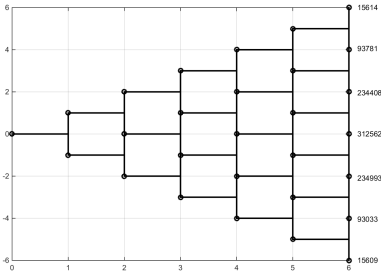
Ścieżki oraz histogram dla 10000 prób.





Symulacje

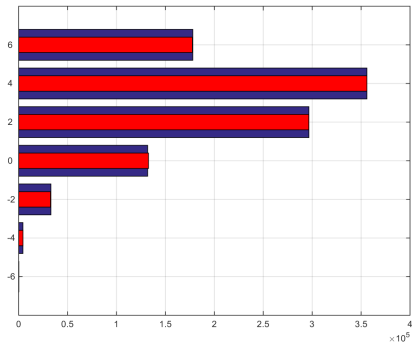
Ścieżki oraz histogram dla 1000000 prób.





Symulacje

Tak wyglądałby nasz histogram dla miliona prób, gdyby prawdopodobieństwo przesunięcia w prawo wynosiło 0.75.





Symulacje

A tak histogram wyglądałby, gdyby prawdopodobieństwo przesunięcia w prawo wynosiło 0.9.

