Igła Buffona

Czyli jak oszacować liczbę π?

Zuzanna Materny

Politechnika Wrocławska

13 grudnia 2016

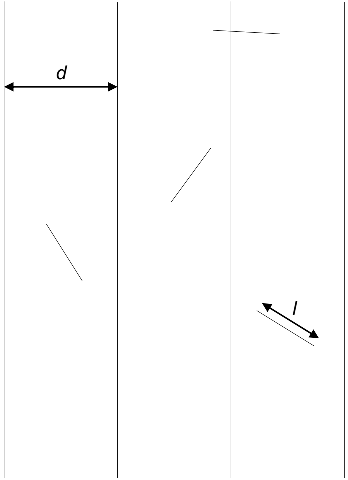
Problem

Na podłogę wyłożoną identycznymi nieskończenie długimi deskami jedna obok drugiej rzucamy igłę o nierozróżnialnych końcach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła będzie dotykać miejsca styku dwóch desek?

Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon

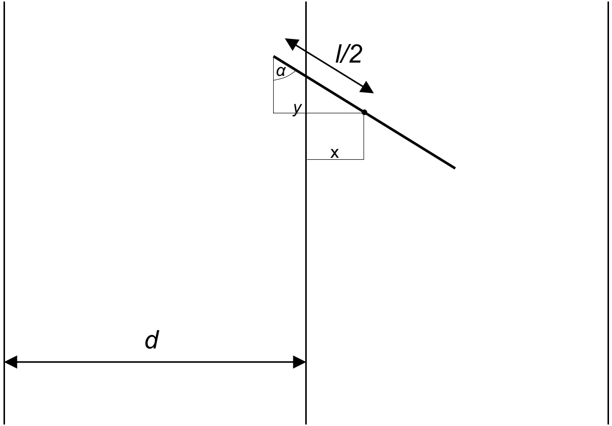
Ilustracja

d – odległość między liniami
l – długość igły, $l < d$

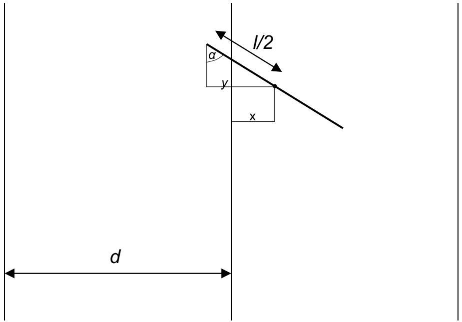


Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:
x – odległość środka igły od najbliższej linii,
α – kąt między igłą a linią.



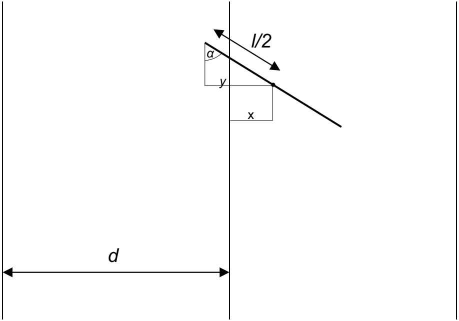
Rozwiązanie



Zatem mamy:

- $x \in (0, \frac{d}{2})$, $\alpha \in (0, \pi)$
- $y = \frac{l}{2}\sin(\alpha)$
- igła przetnie linię, gdy $x \leqslant y$, czyli $x \leqslant \frac{l}{2}\sin(\alpha)$

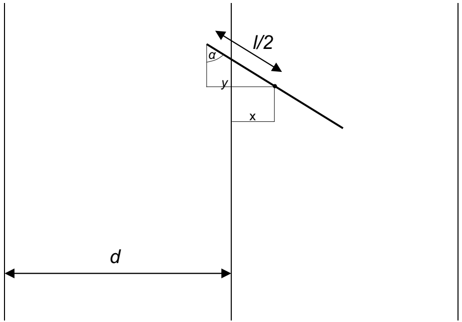
Rozwiązanie



Zatem mamy:

- $x \in (0, \frac{d}{2})$, $\alpha \in (0, \pi)$
- $y = \frac{l}{2} \sin(\alpha)$
- igła przetnie linię, gdy $x \leqslant y$, czyli $x \leqslant \frac{l}{2} \sin(\alpha)$

Rozwiązanie



Zatem mamy:

- $x \in (0, \frac{d}{2})$, $\alpha \in (0, \pi)$
- $y = \frac{l}{2}\sin(\alpha)$
- igła przetnie linię, gdy $x \leqslant y$, czyli $x \leqslant \frac{l}{2}\sin(\alpha)$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \frac{d}{2}), \alpha \in (0, \pi)\}$
- $\mathcal{F}$ – borelowskie podzbiory Ω
- $A = \{(x, \alpha) \in \Omega : x \leqslant \frac{l}{2} \sin(\alpha)\}$
  zdarzenie, że igła przecięła linię
- $P(A) = \frac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega}$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \frac{d}{2}), \alpha \in (0, \pi)\}$
- $\mathcal{F}$ – borelowskie podzbiory Ω
- $A = \{(x, \alpha) \in \Omega : x \leqslant \frac{l}{2} \sin(\alpha)\}$
  zdarzenie, że igła przecięła linię
- $P(A) = \frac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega}$

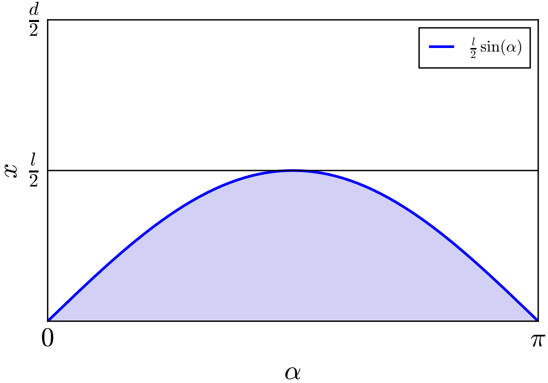
Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \frac{d}{2}), \alpha \in (0, \pi)\}$
- $\mathcal{F}$ – borelowskie podzbiory Ω
- $A = \{(x, \alpha) \in \Omega : x \leqslant \frac{l}{2}\sin(\alpha)\}$
  zdarzenie, że igła przecięła linię
- $P(A) = \frac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega}$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego

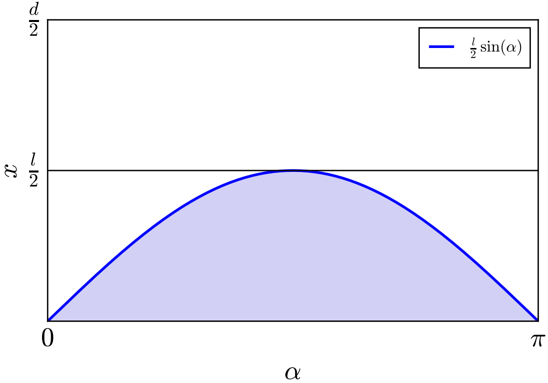
- $\Omega = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \frac{d}{2}), \alpha \in (0, \pi)\}$
- $\mathcal{F}$ – borelowskie podzbiory Ω
- $A = \{(x, \alpha) \in \Omega : x \leqslant \frac{l}{2} \sin(\alpha)\}$
  zdarzenie, że igła przecięła linię
- $P(A) = \frac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega}$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego



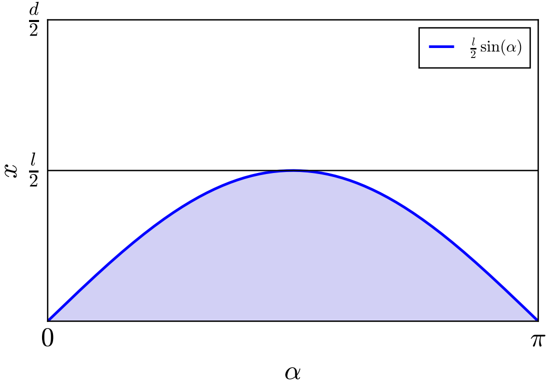
- pole $\Omega = \frac{d}{2}\pi$
- pole $A = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{l}{2}\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = l$
- $P(A) = \frac{l}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego



- pole $\Omega = \frac{d}{2}\pi$
- pole $A = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{l}{2}\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = l$
- $P(A) = \frac{l}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}$

Rozwiązanie – określenie prawdopodobieństwa geometrycznego



- pole $\Omega = \frac{d}{2}\pi$
- pole $A = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{l}{2}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right) = l$
- $P(A) = \frac{l}{\frac{d}{2}\pi} = \frac{2l}{d\pi}$

Przekształcenie równania

Z prawdopodobieństwa geometrycznego mamy

$$P(A) = \frac{2l}{d\pi}.$$

Po przekształceniu równania otrzymujemy

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot P(A)}.$$

Czym jest $P(A)$?

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot P(A)}$$

Korzystając z prawa wielkich liczb możemy zapisać:

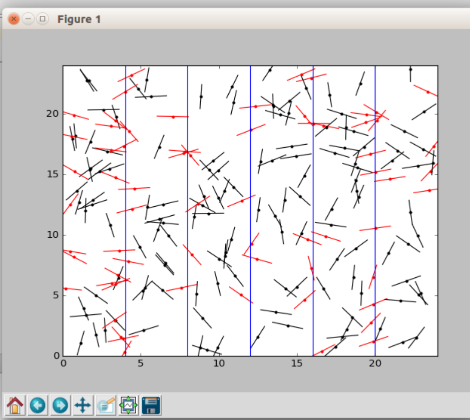
$$P(A) \approx \frac{S_n}{n}$$

gdzie
S_n – ilość sukcesów (igła przecięła linię),
n – ilość prób Bernoulliego (ilość rzutów).
Wtedy, podstawiając do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$\pi \approx \frac{2ln}{dS_n} \xrightarrow[n\to\infty]{z\ pr.1} \pi.$$

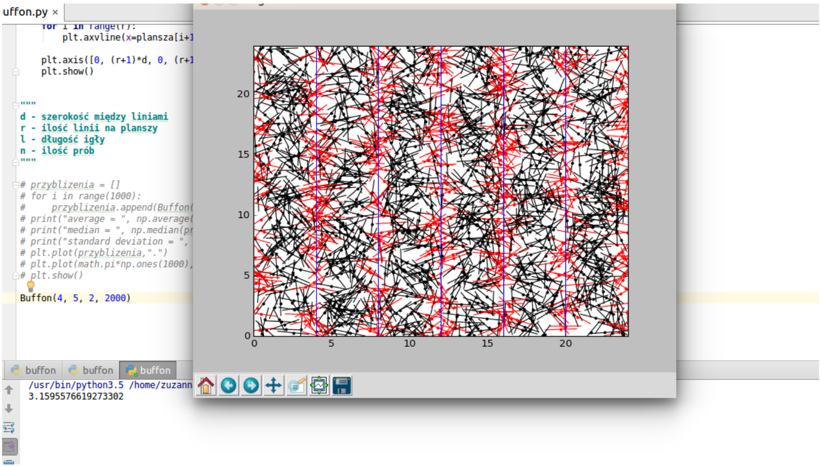
uffon.py ×

```
        if iksy[i] >= roz_min:
            wynik.append(1)
            plt.plot(pos_x[i], pos_y[i], ".r")
            plt.plot([pos_x[i]-iksy[i],pos_x[i]+iksy[i]], [pos_

        else:
            wynik.append(0)
            plt.plot(pos_x[i], pos_y[i], ".k")
            plt.plot([pos_x[i] - iksy[i], pos_x[i] + iksy[i]],

    P = sum(wynik)/n
    prz_pi = 2*l/(P*d)
    print(prz_pi)

    for i in range(r):
        plt.axvline(x=plansza[i+1],ymin=0, ymax=(r+1)*d)

    plt.axis([0, (r+1)*d, 0, (r+1)*d])
    plt.show()


"""
d - szerokość między liniami
r - ilość linii na planszy
l - długość igły
n - ilość prób
"""
Buffon(4, 5, 2, 200)
```

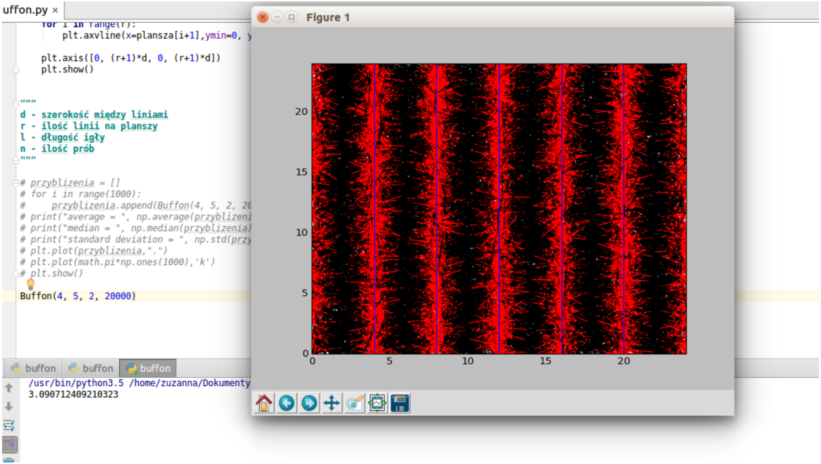


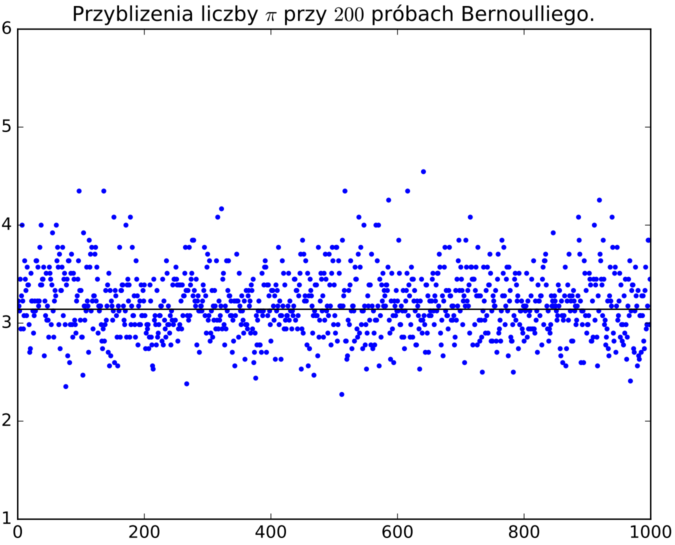
buffon

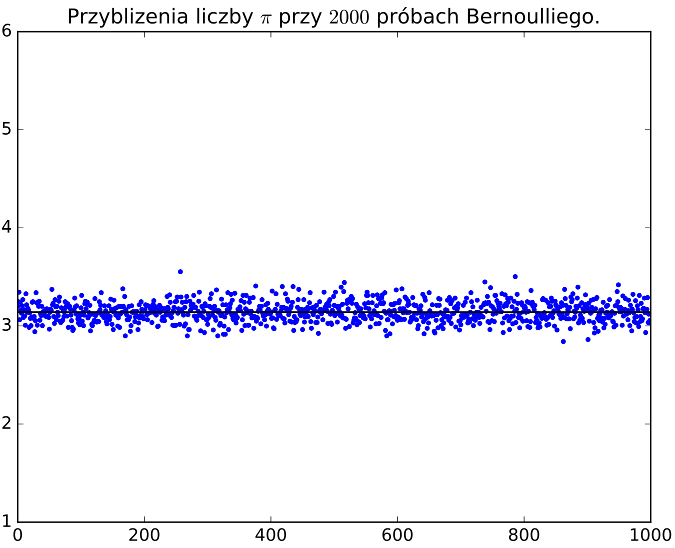
```
/usr/bin/python3.5 /home/zuzanna/Dokumenty/py/buffon.py
3.0769230769230766
```

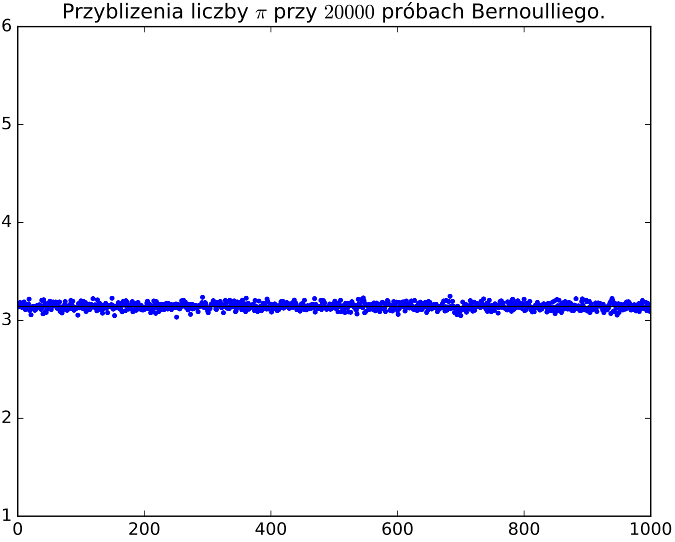


uffon.py ×
for i in range(r):
plt.axvline(x=plansza[i+1
plt.axis([0, (r+1)*d, 0, (r+1
plt.show()
"""
d - szerokość między liniami
r - ilość linii na planszy
l - długość igły
n - ilość prób
"""
# przyblizenia = []
# for i in range(1000):
# przyblizenia.append(Buffon(
# print("average = ", np.average(
# print("median = ", np.median(p
# print("standard deviation = ",
# plt.plot(przyblizenia,".")
# plt.plot(math.pi*np.ones(1000),
# plt.show()
Buffon(4, 5, 2, 2000)
buffon
buffon
buffon
/usr/bin/python3.5 /home/zuzann
3.1595576619273302
0
5
10
15
20
0
5
10
15
20

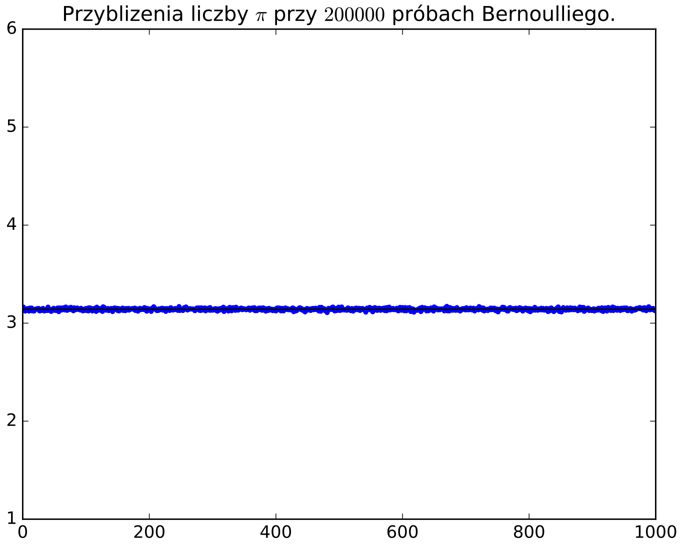

uffon.py
plt.axvline(x=plansza[i+1],ymin=0,
plt.axis([0, (r+1)*d, 0, (r+1)*d])
plt.show()
"""
d - szerokość między liniami
r - ilość linii na planszy
l - długość igły
n - ilość prób
"""
# przyblizenia = []
# for i in range(1000):
#   przyblizenia.append(Buffon(4, 5, 2, 20
# print("average = ", np.average(przyblizeni
# print("median = ", np.median(przyblizenia)
# print("standard deviation = ", np.std(przy
# plt.plot(przyblizenia,".")
# plt.plot(math.pi*np.ones(1000),'k')
# plt.show()
Buffon(4, 5, 2, 20000)
buffon
buffon
buffon
/usr/bin/python3.5 /home/zuzanna/Dokumenty
3.090712409210323
Figure 1
0
5
10
15
20
0
5
10
15
20


Przyblizenia liczby π przy 200 próbach Bernoulliego.
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000


Przyblizenia liczby π przy 2000 próbach Bernoulliego.
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000

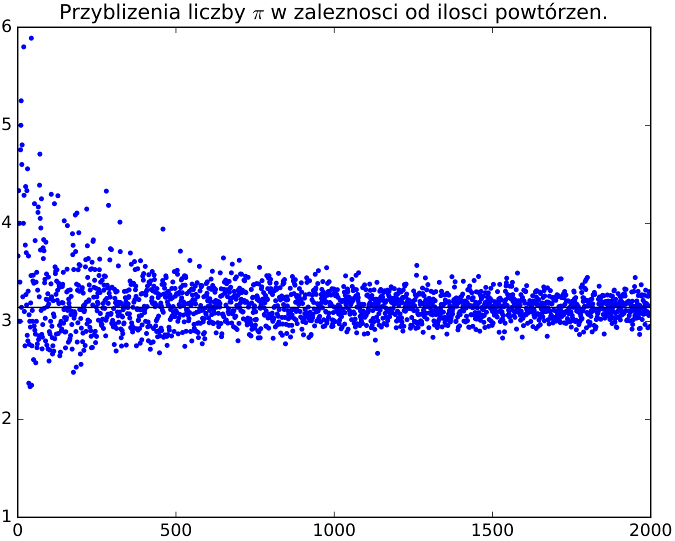


Przyblizenia liczby π przy 20000 próbach Bernoulliego.
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000



Przyblizenia liczby π przy 200000 próbach Bernoulliego.
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000

Dokładność przybliżenia w zależności od ilości prób Bernoulliego – wykres



Dokładność przybliżenia w zależności od ilości prób Bernoulliego – w liczbach

$\mathrm{RMSE}_n(x, \pi) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \pi)^2}$ – pierwiastek błędu średniokwadratowego (Root Mean Squared Error)

k – liczba eksperymentów
x_i – otrzymane przybliżenie liczby π w i-tym eksperymencie składającym się z n prób Bernoulliego

Dokładność przybliżenia w zależności od ilości prób Bernoulliego – w liczbach

$\mathrm{RMSE}_n(x, \pi) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \pi)^2}$ – pierwiastek błędu średniokwadratowego (Root Mean Squared Error)
x_i – otrzymane przybliżenie liczby π w i-tym eksperymencie składającym się z n prób Bernoulliego

$\mathrm{RMSE}_{200}(x, \pi) = 0.344873665211$
$\mathrm{RMSE}_{2000}(x, \pi) = 0.098462678673$
$\mathrm{RMSE}_{20000}(x, \pi) = 0.0323775869205$
$\mathrm{RMSE}_{200000}(x, \pi) = 0.0101462749537$