Rachunek Prawdopodobieństwa

Matematyka Stosowana, studia inżynierskie

Lista nr 1

9 listopada 2023

Zadanie 1 (Dni urodzin) *Oblicz prawdopodobieństwo, że w grupie n osób co najmniej dwie mają urodziny tego samego dnia.*
Jak duża musi być to grupa by to p-stwo było większe niż $\frac{1}{2}$?
Jak duża musi być to grupa by to p-stwo było równe 1?

Zadanie 2 *Na wykładzie pokazany był wzór*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Znajdź analogiczną postać dla trzech zbiorów

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$$

lub też dla dowolnej liczby

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

Zadanie 3 *Rozważyć możliwe uporządkowania symboli 1234 i przypisać każdemu z nich p-stwo $\frac{1}{24}$. Niech A_i będzie zdarzeniem, że cyfra i zajmuje swoje naturalne miejsce ($i = 1, 2, 3, 4$). Policz $\mathbb{P}(A_i)$.*

Zadanie 4 *Rzucamy monetą tak długo, aż w dwóch kolejnych rzutach powtórzy się ta sama strona. Każdemu z możliwych wyników, wymagającemu n rzutów, przypisujemy prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^n}$. Opisać przestrzeń próbek. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:*

a) doświadczenie kończy się przed szóstym rzutem

b) potrzebna jest parzysta liczba rzutów.

Zadanie 5 *Pewien człowiek ma n kluczy, z których dokładnie jeden pasuje do zamka. Klucze są wybierane losowo (bez powtórzeń). To postępowanie może wymagać $1, 2, \ldots, n$ prób. Pokazać, że każdy z tych wyników ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{n}$.*

Zadanie 6 *Znaleźć prawdopodobieństwo, że w próbce r cyfr wybranych losowo nie ma dwóch jednakowych. Ocenić wartość liczbową p_{10} za pomocą wzoru Stirlinga.*

Zadanie 7 *Rozważmy $\Omega = [0, 1]$ (lub $\mathbb{R}$) i rodzinę zbiorów*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \text{ lub } |A^c| \leq \aleph_0\}$$

(czyli $\mathcal{A}$ zawiera zbiory co najwyżej przeliczalne oraz ich dopełnienia). Czy $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą? (Por. zad 3 z listy)