Ubezpieczenia Majątkowe
Lista nr 3

(Zadania 15-21 pochodzą z Egzaminów aktuarialnych i zostały udostępnione przez p. dr. Wojciecha Otto)

Zadanie 15.

Wartości pojedynczych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gamma o parametrach (α, β) równych $(3, 1)$, to znaczy o gęstości określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \exp(-x),$$

i ponadto niezależnymi od ilości szkód w ciągu roku, która to ilość ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 12.

Łączną wartość szkód w ciągu roku przybliżamy przesuniętym rozkładem Gamma o parametrach (x_0, α_0, β_0), a więc rozkładem, który ma zmienna losowa $(X + x_0)$, jeśli sama zmienna *X* ma rozkład Gamma (α_0, β_0). Parametry wybieramy tak, aby rozkład aproksymujący i aproksymowany miały te same momenty pierwszych trzech rzędów. Ile wynoszą parametry rozkładu aproksymującego (x_0, α_0, β_0) ? (Odp. $x_0 = -21.6$; $\alpha_0 = 23.04$; $\beta_0 = 0.4$)

Zadanie 16.

Łączna wartość szkód *S* w portfelu ryzyk jest sumą łącznej wartości szkód S_1 w subportfelu 1 i łącznej wartości szkód S_2 w subportfelu 2. S_1 i S_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi. W tabeli podane są ich wartości oczekiwane, wariancje i momenty centralne trzeciego rzędu:

	μ	σ^2	μ_3
S_1	200	500	4000
S_2	150	350	2800

Rozważmy dwie alternatywne metody aproksymacji rozkładu zmiennej *S*:

- metoda 1: aproksymujemy rozkład zmiennej *S* za pomocą rozkładu przesuniętego Gamma(c, α, β) (gdzie *c* jest parametrem przesunięcia)
- metoda 2: aproksymujemy osobno rozkład zmiennej S_1 za pomocą rozkładu przesuniętego Gamma(c_1, α_1, β_1) i rozkład zmiennej S_2 za pomocą rozkładu przesuniętego Gamma(c_2, α_2, β_2), a następnie splot otrzymanych rozkładów traktujemy jako aproksymację rozkładu zmiennej *S*.

Ile wynosi różnica: $c - (c_1 + c_2)$? (Odp. 0).

Zadanie 17.

Rozkład łącznej wartości szkód *S* w nadchodzącym roku aproksymujemy za pomocą zmiennej losowej $\tilde{S}$ o przesuniętym rozkładzie logarytmiczno-normalnym z parametrami (x_0, μ, σ^2) - tzn. zmienna $\ln(\tilde{S} - x_0)$ ma rozkład normalny o parametrach (μ, σ^2). Zmienna $\tilde{S}$ ma z założenia mieć te same momenty pierwszych trzech rzędów, co zmienna *S*. Jeśli o momentach zmiennej *S* założymy, iż:

$$E(S) = 100{,}16$$
$$E(S^2) = \exp\left(\tfrac{83}{9}\right)$$
$$E(S^3) = \exp(14)$$

to ile wyniosą parametry rozkładu zmiennej $\tilde{S}$? Odp. $(x_0, \mu, \sigma^2) = \left(5.00, \tfrac{9}{2}, \tfrac{1}{9}\right)$

Ubezpieczenia Majątkowe
Lista nr 3

(Zadania 15-21 pochodzą z Egzaminów aktuarialnych i zostały udostępnione przez p. dr. Wojciecha Otto)

Zadanie 18.
Rozważamy *n* jednakowych, niezależnych ryzyk. Dla każdego z tych ryzyk:

- może wystąpić jedna szkoda z p-stwem q
- lub nie wystąpić – z p-stwem $p = 1 - q$

Wysokości szkód dla tych ryzyk są zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Niech *M* oznacza maksymalną wysokość spośród szkód, które wystąpiły (lub zero, jeśli nie wystąpiła żadna szkoda). Jeśli przyjmiemy: $n = 16$ oraz $q = 0.424$, to ile wyniesie mediana zmiennej *M* ? (Odp. w przybliżeniu 9).

Zadanie 19.
Ilość szkód z *N* pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą λ, a wartości kolejnych szkód $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i niezależnymi od zmiennej *N*. Rozkład wartości pojedynczej szkody określony jest na przedziale $(0,1]$ i ma wartość oczekiwaną równą $\mu \in (0,1)$. Ubezpieczyciel wystawia na to ryzyko polisę z sumą ubezpieczenia 1, z pokryciem każdej kolejnej szkody proporcjonalnym do „nieskonsumowanej do tej pory” części sumy ubezpieczenia, a więc:

- za (ewentualną) szkodę Y_1 wypłaca odszkodowanie w pełnej wysokości Y_1
- za (ewentualną) szkodę Y_2 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1-Y_1)\cdot Y_2$
- za (ewentualną) szkodę Y_3 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1-Y_1-(1-Y_1)\cdot Y_2]\cdot Y_3$, co równe jest $(1-Y_1)\cdot(1-Y_2)\cdot Y_3$
- za (ewentualną) szkodę Y_4 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1-Y_1-(1-Y_1)Y_2-(1-Y_1)(1-Y_2)Y_3]\cdot Y_4$, co równa się $(1-Y_1)(1-Y_2)(1-Y_3)\cdot Y_4$,

itd.

Ile wynosi składka netto za to ubezpieczenie ? (Odp. $1-e^{-\lambda\mu}$)

Zadanie 20.
Łączna wartość szkód z całego portfela *S* równa jest sumie $S_1 + S_2$, oznaczających odpowiednio łączną wartość szkód z dwóch subportfeli. Ilość szkód N_1 w pierwszym subportfelu ma rozkład dwumianowy o parametrach $\left(100, \ \frac{1}{5}\right)$ (sto polis, z każdej z nich szkoda z p-stwem 0.2). Ilość szkód N_2 w drugim subportfelu (niezależna od ilości w pierwszym) ma rozkład ujemny dwumianowy o parametrach $(r, \ q)$. W obu subportfelach wartości pojedynczych szkód Y_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie ze skończoną wartością oczekiwaną $E(Y)$ i skończoną wariancją $VAR(Y)$ (w obu subportfelach jest to ten sam rozkład), niezależnymi także od ilości szkód N_1 i N_2. Jeśli wiadomo, że $E(S_1) = E(S_2)$ oraz że $VAR(S) = E(N_1 + N_2)\cdot E(Y^2)$, to ile wynosi parametr *q* rozkładu zmiennej N_2 ? (Odp. 1/6)

Zadanie 21. (Zadanie za trzy „plusy”)
Wartość szkody *Y* ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot y^{\alpha-1} e^{-\beta\cdot y}$$, a parametry rozkładu wynoszą $\alpha = 6; \ \beta = 2$

Ile wynosi wartość oczekiwana nadwyżki szkody ponad wartość oczekiwaną, tzn. $E\left[(Y-EY)_+\right]$? (Odp. w przybliżeniu 0,48)