Ubezpieczenia majątkowe
2023/2024

Lista 3

1. Załóżmy, że zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Pokaż, że zmienna losowa $X = bU^{-1/a}$ ma rozkład Pareto z następującą dystrybuantą
$$F_{a,b}(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a \quad x \geqslant b.$$
2. Niech U będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$. Zdefiniujmy nową zmienna losową $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ dla $\lambda > 0$. Znajdź rozkład X.
3. Niech U_1 oraz U_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ oraz $a > 0$ jest stałą. Pokaż, że $X = U_1^{1/a}U_2$ ma rozkład z następującą funkcją gestości
$$f(x) = \frac{a}{a-1}(1 - x^{a-1}), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$
4. Rozpatrzmy zmienną losową $X \sim P(\lambda)$. Ponadto załóżmy, że $\lambda \sim \Gamma(1,3)$. Znajdź rozkład X.
5. W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Ryzyka generują szkody o wartościach będących dodatnimi zmiennymi losowymi o gęstościach wykładniczych: $f_{Y|B=\beta}(y) = \beta e^{-\beta y}$. Populacja ryzyk charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem skali tych ryzyk, reprezentowanej przez parametr β rozkładu.
   - Przyjmijmy, iż rozkład parametru skali w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość: $g_B(\beta) = e^{-\beta}$. Dla losowo dobranego ryzyka z populacji, ile wynosi warunkowa wartość oczekiwana szkody (pod warunkiem że do niej dojdzie)?
   - Jeśli przyjmiemy, iż parametr B ma w populacji ryzyk rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$, to jaką gęstość ma rozkład losowo wybranej szkody z tego portfela (przy założeniu, iż portfel wygenerował przynajmniej jedną szkodę)?

Potrzebne charakterystyki

Rozkład Gamma $\Gamma(\lambda, p)$, $\lambda > 0$, $p > 0$ ma następującą funkcje gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqslant 0 \\ \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

gdzie $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ jest funkcją gamma.