Ubezpieczenia majątkowe
2023/2024

Lista 4

1. Zmienna losowa $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$ ($S = 0$, gdy $N = 0$) ma złożony rozkład geometryczny:

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika Y. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0, 1, \ldots, 5$ prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(S = k)$.

k	$\mathbb{P}(Y = k)$	$\mathbb{P}(S = k)$
0	0	0.50000
1	0.2	0.05000
2	0.3	0.08000
3	0.1	0.04050
4	0.2	0.06855
5	0.1	0.04693
6	0.1	?

Ile wynosi $\mathbb{P}(S = 6)$?

2. Załóżmy, że S ma złożony rozkład Poissona z parametrem λ i dyskretnym rozkładem pojedynczej szkody $p(x) = P(X_i = x)$, $x > 0$. Niech $0 < \alpha < 1$. Rozważmy $\tilde{S}$ o złożonym rozkładzie Poissona z parametrem $\tilde{\lambda} = \lambda/\alpha$ oraz następującym rozkładem pojedynczej szkody $\tilde{p}(x)$:

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \alpha p(x) & \text{dla } x > 0 \\ 1 - \alpha & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Pokaż, że S oraz $\tilde{S}$ mają ten sam rozkład.

3. Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka ma złożony rozkład Poissona z wartością oczekiwaną ilości szkód równą $\lambda = \frac{1}{3}$ i rozkładem wartości pojedynczej szkody danym na przedziale $(0, 10)$

gęstością:

$$f_Y(y) = \frac{2}{100}(10 - y).$$

Ubezpieczyciel pokrywa pierwszą ze szkód (jeśli do niej dojdzie) w pełni, zaś z każdej następnej szkody jej nadwyżkę ponad 1. Jeśli więc przez X oznaczymy łączną wartość wypłat, to:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0, \\ Y_1 & \text{gdy } N = 1, \\ Y_1 + \sum_{k=2}^{N} (Y_i - 1)^+ & \text{gdy } N > 1. \end{cases}$$

Zakładamy, że wszystkie szkody są natychmiast zgłaszane, i w związku z tym nie istnieje możliwość deklarowania „po fakcie", która ze szkód była tą pierwszą. Ile wynosi w tym wypadku składka netto?

4. Ilość szkód z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 20, zaś wartości kolejnych szkód są nawzajem niezależne (i niezależne od ilości) i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 100. Ubezpieczyciel pokrywa największą ze szkód (oznaczmy ją przez M). Oczywiście $M = 0$, jeśli przypadkiem żadna szkoda się nie zdarzy. Znajdź x takie, że $\mathbb{P}(M > x) = 1 - \exp(-0.05)$.

5. Łączna wartość szkód z polisy wynosi $X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$). X ma złożony rozkład Poissona, z wartością oczekiwaną zmiennej N równą λ zaś Y ma rozkład logarytmiczny:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{-1}{\ln(1 - c)} \frac{c^k}{k}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Wyznacz rozkład X.

6. Łączna wartość szkód z polisy wynosi $X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$). X ma złożony rozkład Poissona, z wartością oczekiwaną zmiennej N równą

$$\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right),$$

zaś Y ma rozkład logarytmiczny:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{-1}{\ln(0.75)} \frac{0.25^k}{k}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Znajdź takie k, że $\mathbb{P}(X > k) < \frac{1}{1000} < \mathbb{P}(X \geq k)$.