Ubezpieczenia majątkowe
2023/2024

Lista 5

1. Załóżmy, że rozkład pojedynczej szkody w modelu ryzyka kolektywnego ma następującą funkcję gęstości:

$$f(x) = 0.5x^2 \exp(-x), \;\; x \geq 0.$$

Dodatkowo zakładamy, że ilość szkód opisana jest zmienną losową z rozkładu Poissona z parametrem $\lambda = 12$. Zagregowaną wypłatę S aproksymujemy przesuniętym rozkładem Gamma z parametrami x_0, α oraz β. Wyznacz te parametry.

2. Niech S_1 będzie złożonym rozkładem Poissona z parametrem $\lambda_1 = 2$ oraz wielkością wypłaty X_1 o rozkładzie

X_1	1	2	3
$\mathbb{P}(X_1 = x)$	0.2	0.6	0.2

Niech S_2 będzie złożonym rozkładem Poissona z parametrem $\lambda_2 = 6$ oraz wielkością wypłaty X_2 o rozkładzie

X_2	3	4
$\mathbb{P}(X_2 = x)$	0.5	0.5

Znaleźć rozkład $S = S_1 + S_2$, gdy S_1 oraz S_2 są niezależne.

3. Dla ustalonego θ będącego wartością zmiennej losowej Θ, rozkład liczby wypłat w przedziale $(0, t]$ ma rozkład Poissona z parametrem θt. Pokazać, że dla bezwarunkowego rozkładu liczby wypłat $N(t)$ w $(0, t]$ zachodzi

$$\frac{\mathrm{Var} N(t)}{EN(t)} = 1 + t\frac{\mathrm{Var}(\Theta)}{\mathbb{E}\Theta}.$$

4. W kolejnych okresach czasu, ubezpieczony charakteryzujacy się wartością q będącego wartością zmiennej losowej Q, generuje szkody w ilości N_t:

$$\mathbb{P}(N_t = 1|Q = q) = q = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0|Q = q), \;\; t = 1, 2;$$

przy czym zmienne N_1 oraz N_2 są warunkowo niezależne przy ustalonym Q. Gęstość zmiennej losowej Q jest następująca:

$$f_Q(x) = 2(1-x), \quad x \in (0,1).$$

W efekcie doświadczenia dwuetapowego (wylosowanie ubezpieczonego, następnie wygenerowanie przez niego szkód w ilości N_1 i potem N_2), policzyć $\mathrm{Cov}(N_1, N_2)$.

5. Towarzystwo A ma portfel, w którym ilość szkód jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią $\lambda = 20$. Wartość pojedynczej szkody jest równa 5000 z prawdopodobieństwem 0.33... i 10000 z prawdopodobieństwem 0.66.... Towarzystwo B ma portfel, w którym ilość szkód jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią $\lambda = 30$. Wartość pojedynczej szkody jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale (7500, 12500). Towrzystwa tworzą pool i każde z nich uczestniczy w każdej szkodzie w takiej proporcji, w jakiej jest wartość oczekiwana łącznych szkód danego towarzystwa do wartości oczekiwanej sumy szkód obydwu towarzystw. O ile procent zmniejszyła się wariancja wartości wypłat towarzystwa A?

6. Łączna wartość odszkodowań z portfela ryzyk ma rozkład o funkcji tworzącej momenty postaci:

$$M_S(t) = \exp\left(\frac{4t(10-t)}{(5-t)^2}\right), \quad t < 5.$$

W portfelu tym ilość roszczeń ma rozkład Poissona ze średnią 5. Pojawiające się roszczenie z prawdopodobieństwem p jest oddalone, a z prwadopodobieństwem $q = 1 - p$ odpowiadające mu odszkodowanie ma pewien rozkład ciągły na dodatniej półosi. Obliczyć p.