ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

## LICZBY RZECZYWISTE

**Uwagi.** $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oznaczają odpowiednio zbiór liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych. Symbol $\sum_{k=1}^{n} a_k$ definiujemy indukcyjnie:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1; \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots.$$

1. Wykaż, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej ma następujące własności:

   (a) $|x| = |-x|$; (b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$; (c) $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$;

   (d) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$; (e) $|x| - |y| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$; (f) $|xy| = |x||y|$;

   (g) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$; (h) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

   dla dowolnych $x$, $y \in \mathbb{R}$.

2. Oblicz sumy

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (wskazówka: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$); (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej uzasadnij, że

   (a) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ dla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$;

   (b) $(1+x)^n > 1 + nx$ dla $-1 < x$, $x \neq 0$ oraz $n = 2, 3, \ldots$;
   [nierówność Bernoulliego]

   (c) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$;
   [nierówność Schwarza]

   (d) $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [dwumian Newtona]
   (też dla $x = 0$ lub $y = 0$, gdy przyjmiemy umowę, że $0^0 = 1$);

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$;

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$;

   (g) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

   (h) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n = 1, 2, \ldots$;

   (i) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, $n = 1, 2, \ldots$;

   (j) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) > 1 + a_1 + \cdots + a_n$ dla $a_1, \ldots, a_n > 0$ oraz $n = 2, 3, \ldots$.

4. Udowodnij nierówność pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną:

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

dla $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$. Wskazówka: sprawdź najpierw $(*)$ dla $n = 1, 2$. Następnie z prawdziwości $(*)$ dla pewnego $n > 1$ uzasadnij prawdziwość $(*)$ dla $2n$ i dla $n-1$ w miejsce $n$.

5. Udowodnij nierówność pomiędzy średnią harmoniczną i geometryczną:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

dla $a_1, \dots, a_n > 0$. Wskazówka jak wyżej.

6. Korzystając z zadania 3 uzasadnij, że

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

7. Korzystając z nierówności pomiędzy średnimi uzasadnij, że

(a) $8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a)$ dla $a, b, c > 0$;

(b) $\displaystyle\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$ dla $x_1, \dots, x_n > 0$ i $n = 2, 3, \dots$;

(c) $\displaystyle\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leqslant \frac{3}{4}$ dla $x, y, z \geqslant 0$ i $x + y + z = 1$.

8. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla dowolnych $x$, $y \in \mathbb{Q}$ równanie $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

9. Wykaż, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ są niewymierne.