ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CIĄGI LICZBOWE

1. Dane są ciągi w $\mathbb{R}$: (a) $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$; (b) $0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$; (c) $1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$. Jak wyrazić n-ty wyraz każdego z tych ciągów jako funkcję n, gdzie $n \in \mathbb{N}$?
2. Wykazać, że suma dwóch ciągów rzeczywistych ograniczonych z góry jest ciągiem ograniczonym z góry. Czy iloczyn dwóch ciągów ograniczonych z góry jest ciągiem ograniczonym z góry?
3. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. Czy jeden z tych ciągów musi być zbieżny do zera? Czy ciągi te muszą być ograniczone? Czy ciągi te muszą być zbieżne?
4. Pokazać, że: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.
5. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$. Czy musi być $|\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = 1$?
6. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Czy ciąg a_n musi być zbieżny?
7. Ciągi a_n i b_n są takie, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$. Czy ciągi a_n i b_n muszą być zbieżne? Jeśli tak, to co można powiedzieć o granicach tych ciągów?
8. Ciąg a_n jest monotoniczny i zawiera podciąg zbieżny do g. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.
9. Pokazać, że jeżeli $a_n \geqslant M > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
10. Ciąg a_n jest ograniczony z góry, a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$. Czy musi istnieć granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$?
11. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g > 0$ i $\lambda \in (0, g)$. Wykazać, że istnieje takie n_0, że $a_n > \lambda$ dla dowolnego $n > n_0$. Jak brzmi wersja tego twierdzenia dla przypadku $g < 0$?
12. Niech $A \subset \mathbb{R}, g = \sup A$ i $g \notin A$. Pokazać, że istnieje ściśle rosnący ciąg $a_n \in A$, którego granicą jest g.
13. Pokazać, że jeżeli $a_n \geqslant b_n$ i granice obu ciągów istnieją, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
14. Pokazać, że każda liczba rzeczywista jest: a) kresem górnym pewnego zbioru liczb wymiernych, b) granicą ciągu liczb wymiernych.
15. Pokazać, że jeżeli $a > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
16. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
17. Wykorzystując twierdzenie o ciągach monotonicznych, sprawdzić zbieżność poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}; \qquad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n};$$

$$x_1 = a, \quad 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{ i } \quad x_{n+1} = \frac{1}{4 - 3x_n}; \qquad y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ i } \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + y_n^2).$$

18. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, znaleźć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad b_n = \sqrt[n]{1+n+5^n};$$

$$c_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}; \qquad d_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n - 2^n}; \qquad e_n = \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n}}; \qquad f_n = \sqrt[n^2]{1+2^n}.$$

19. Stosując twierdzenie Stolza, obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{n^6}{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}; \qquad b_n = \frac{\ln n!}{n \ln n}.$$

20. Sprawdzić, czy ciągi

$$a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}; \qquad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n^2}$$

spełniają warunek Cauchy'ego zbieżności w $\mathbb{R}$.

21. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, gdzie $g < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykorzystać ten fakt do obliczenia granicy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} \qquad (a > 0, \quad b > 1).$$

22. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie $g < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykorzystać ten fakt do obliczenia granic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n}{n^n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (a > 0).$$

23. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i jest także równa g. Wykorzystać ten fakt do obliczenia granic:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

24. Obliczyć granice ciągów lub stwierdzić ich rozbieżność:

$$a_= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n; \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n; \qquad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$d_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n; \qquad e_n = \frac{(n + \sin n)n}{1+n^2}; \qquad f_n = \frac{3^n + 2^n}{3^n + (-2)^n}.$$

25. Znaleźć zbiór punktów skupienia ciągów, a następnie podać ich granicę dolną i górną:

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{12}; \qquad b_n = \frac{3}{5}n - \left[\frac{3}{5}n\right]; \qquad c_n = 1 + n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

26. Wykazać, że jeżeli ciąg a_n jest zbieżny to

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

27. Niech $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$, $\alpha < \beta$ oraz $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Pokazać, że zbiór punktów skupienia ciągu a_n jest całym odcinkiem $[\alpha, \beta]$. Podać przykłady ciągów spełniających trzy wyżej podane warunki.